

X

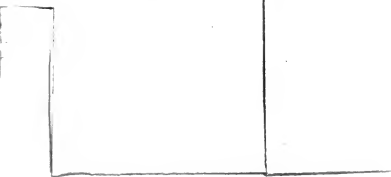
Del Lett. Riva

15 G. A

17.1.102

S. Trinita  
A.º 5913.

Handwritten scribbles and marks, possibly including the number 2/22.





DE INFINITIS  
 INFINITORUM,  
 ET  
 INFINITE PARVORUM  
 ORDINIBUS  
 DISQUISITIO GEOMETRICA

*In qua, variis utriusque generis gradibus demonstratis, tum  
 Methodi Infinitesimalis fundamenta ostenduntur, tum  
 præcipuè PLUSQUAM INFINITA spatia hy-  
 perbolica VVallisii, adversus hæcerrimos  
 eorumdem impugnatores, vindicantur.*

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO CREMONENSI

S. Theol. Doct. In Pisana Univerſitate Publ. Phil. Profess.  
 ac Magni Ducis Etruriæ Theologo, & Mathematico,  
 à Regia Societate.



P I S I S, MDCCX.

---

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiepisc.  
 De Superiorum Licentia.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

DEPARTMENT OF CHEMISTRY

LABORATORY OF ORGANIC CHEMISTRY

REPORT

ON THE REACTION OF

ALIPHATIC CARBON DIOXIDES WITH  
ALIPHATIC AMINES

BY

ROBERT M. WILSON

AND

WALTER H. C. S. WILSON

CHICAGO, ILLINOIS

1954

UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS





# IN OPERIS, Et Auctoris Laudem.



## O D E.

**R**esolve aeras, tolle repagula,  
Adstricta certo limite Quantitas,  
Quae Te coarctant terminorum  
Contere liberior catenas:

Attende vastos, quos tibi nunc fasus  
Contracta nullis finibus Area  
Recludit, immensis data  
Planitiem spatii capacem.

Quondam proterva fronte quibuslibet  
Geometrarum misibus obstitit,  
Proportions, Calculique  
Impatiens tolerare frangum;

Sed, Arte GRANDI, jam nihil interest,  
Seu limes arctas ambiat undique  
Extensiones, sive nullam  
Obtineant spatia ampla metam.

Parent iisdem Legibus omnia,  
Progressus idem, par ratio datur,  
Respectus unus singulorum,  
Maxima quo minimis cohaerent.

Magis stupendam est, quod similis tenor  
Proportionum regnat in omnibus  
Vel summè, & infinitè parvis  
Partibus, quibus aucta crescit,

Dato minori tempore quolibet,  
Ex ordinatæ fluxibus Area;  
Sed amplius miranda longè  
Partibus his elementa rursus

Minora, & istis quæ simili modo  
Adhuc minores partículae flunnt,  
Nec limitem Natura novis,  
Lumen ut Angligenam notavit.

Non

Non dispas ordo per similes gradus  
 Deducit Infinita prioribus  
 = Majora semper, quae dancipis  
 Agglomerat spatia ampliora.

Hæc Vallis inter novit Hyperbolas,  
 Ad altiora quando potentias  
 Assurgit applicata, plusquam  
 Fina superficem carentem

Complexa: quidquid sive Parentius  
 Contra reclinet, seu Varignonius,  
 Quorum cavillos elevasti  
 Dacti Operis Eder, & Magister

Profundioris GRANDE Matheseos,  
 Qui mente vasta materiam quoque  
 Excellit insinuatam, & ultra  
 Ingenii penetras volatu.

Seu Te Poësis sacrat Apollinei,  
 Sive eruditus Historis vacas,  
 Stylo aut peioras eloquenti,  
 Dogmata seu ræsolvas facetas

Divina Legit, seu Penetratia  
 Natura aperto in Lumine collocas,  
 Sen jura pandis Machinarum,  
 Seu Numerâ Harmonicâ reformatas,

Qua sit vatorum aut Orbis Sydesum,  
 Aut quæ Refracti sit Radii Vie  
 Scrutaris, unplexosque ductus,  
 Algebra quos speciosa signat;

Ubique summus, nec superabilis,  
 Sed unus ipsum Te superas, viam  
 Geometrarum quando calcas,  
 Tot variis methodis abundans.

Quæsitæ quis Te solvere promptior,  
 Curvasque sili flexilis in modum  
 Veriare, ræsolura've certas  
 Adducere innumeris Figuris?

Id Vivaxi Enigmata, id Hugeni  
 Probatæ Ræsolva, id Cycli, & Hyperbolæ  
 Ductio, ad micta carentum  
 Innumerabilis Ordo monstrat.



Præceptoris olim suo, in Obsequii Argumentum, canebat  
 Carolus Taglini Medicina Doctor,  
 Publicus Philosophia in Pisano Lyceo  
 Professor.

NOBILISSIMO, ATQUE ERUDITISSIMO VIRO  
**HENRICO NEVTON**

POTENTISSIMÆ ANGLORUM REGINÆ,

*Apud Regiam Celsitudinem COSMI III. M. Ducis Etruria,  
nec non apud Serenissimam Genuensium Rempublicam,*

A B L E G A T O.

GUIDO GRANDUS FELICITATEM.



Incredibile sciendi desiderium, & inexpletibilem, abstrusa quæque, magisque profunda rimandi, cupiditatem humanæ menti summus Nature Conditor indidit, ut ad Auctoris sui cognitionem, non solum officii sui debito sol-

licitante, gratique etiam amoris stimulo urgente, sed amplius obiecti ipsius sublimitate ineffabili invitante, quodammodo excitaretur. Huic genio præ omnibus indulgentes, imò fræna laxantes, acutissimi, ac præstantissimi Mathematici, assiduo, & operoso studio in id maximè incubuerunt, ut ordine perspicuo rationis suæ vim gradatim promoventes, ex primis, planissimis, ac cuilibet facillè obvisis veritatibus, quarum notitiam ab ipso Deo Opt. Max. nostris animis insertam accepimus, ad alias magis arduas detegendas sibi viam munirent, eo successu, quem paucilicet pro merito intelligant, plerique tamen in dies sentiunt, & omnes jure mirantur. Nam, ut cetera emittam admiranda Theoremata, quæ se ab ipsis Geometriæ nascentis exordiis prodiderunt, velut de æqualibus triangulis, & parallelogrammis in eadem basi, atque in iisdem parallelis, ad quàmlibet distans intervallum obliquè excurrentibus: de spatiis quantumvis exiguis ad quamvis lineam applicandis, adeoque ad perimetrum majorem

rem quolibet dato redigendis &c. quæ nunc, ut augas, & crepundia ætatis illius despicias: manet adhuc inconcussa adversus omnem reluctantis imaginationis conatum, adversus Inanes Scepticorum cavillationes, & Pseudophilosophorum Impetus, præcis olim temporibus demonstrata, cujusvis magnitudinis infinita. Divisibilitas: manet tam certa, & evidens, quam adhuc intellectui nostro incomprehensibilis, quæ ante omnem hominum memoriam olim detecta fuit, nonnullarum quantitatum Incommensurabilitas, quam si quis ignoraret, hunc non hominem, sed pecudem potius dicendum Plato censebat: manet adhuc numquam non celebranda, æquæ ac semper stupenda illa Asymptotorum affectio, quam, adolescente jam Geometria, Conici Scriptores deprehenderunt, nunc autem Mathematici recentiores, non ad unam, aut alteram curvam, Hyperbolam scilicet Apollonii, & Conchoidem Nicomedis, dumtaxat restringi, sed innumeris prorsus novis lineis facillime descriptionis, nonnullis etiam antiquis eadem lege continuatis, ut Nicostrati Quadraticis, & Dioclis Cissoïdis, convenire demonstrarunt. Verùm hæc nulla sunt, si cum illa felici non minùs, quam audaci Geometriæ, virilitatem suam jam adeptæ, aggressionem conferantur, qua scilicet innumeratos terminos in unam summam finitam colligere, immense longitudinis solida, & superficies, terminate, ac undique circumscriptæ sui generis areæ conquare, infinitarum quantitatum proportionem, & gradus distinguere, & infinitè parva magnitudinum elementa reperire, atque in varias classes distribuere docuit. Neque verò ad sterilem, & otiosam dumtaxat speculationem hæc pertinere, non potest externis hominum usibus, quibus civilis vita maxime indiget, inservire: quis arbitretur: nulla quippe adeo abstracta, & ab omni materiæ commercio remota cognitio in Geometricis assignari potest, cui vel nunc, vel aliquando, fructus aliquis ex his, quæ apud vulgus in pretio esse solent, non sit referendus, sive ipse per se ipsum pensat, sive medijs alijs notitijs eandem, aut alioquin Scientiæ, quam prior illa cognitio præcessit. Præcipue in his, quæ Geometriæ speculationibus, & abstractionibus Analyticæ Calculi, tum Mechanicæ, tum Opticæ, tum Astronomicæ, tum Nauticæ, tum Geographicæ, tum Architectonicæ, ac cæterarum denique Scientiarum, & Artium, Republice commodis, & utilitatibus proficiscentes, auctas hodie, locupletatas, & ad perfectionem maxime adhiberi accipimus, ubi quæ semper incrementum, & progressum

CIRCULO UNIVERSITATIS  
 INTERMINATO,  
 INCIRCUMSCRIPTO,  
 CUJUS CENTRUM UBIQUE EST;  
 CIRCUMFERENTIA NULLIBI,

# INFINITO

OMNIUM INFINITORUM,  
 ET PLUSQUAM INFINITORUM

## MAXIMO,

CUJUS MAGNITUDINIS NON EST FINIS,  
 SAPIENTIÆ NON EST NUMERUS,  
 BONITATIS INFINITUS EST THESAURUS.

*Q U O D*

SUÆ INFINITATIS VESTIGIA  
 CREATURIS IMPRESSERIT,

HOMI-



HOMINIQUE AD IMAGINEM SUAM FACTO

INFINITI PERSCRUTANDI CAPACEM MENTEM DEDERIT,

A C. SUI IPSIUS,

IN ÆTERNO BEATITUDINIS LUMINE,

*FACIE AD FACIEM, ALIQUANDO CONTEMPLANDI,*

SPEM FECERIT, GRATIAM OBTULERIT, SORTEM PROMISERIT.

GRATI ANIMI ERGO,

OMNIUM OPERUM AUCTORI

EXIGUAM HANC OPELLAM

DE INFINITIS INFINITORUM,

INFINITEQUE PARVORUM ORDINIBUS

GUIDO. GRANDUS

*HOMINUM MINIMUS, MONACHORUM ULTIMUS,*

SED INNUMERIS TANTÆ MAJESTATIS BENEFICIIS

*ADSTRICTISSIMUS,*

HUMILLIME OFFERT,

*DAT, DICAT, CONSECRATQUE.*



IN OPE-

DEO

VERITATIS,

LUMINUM PATRI,

SCIENTIARUM DOMINO,

GEOMETRIÆ PRÆSIDI,

BONORUM OMNIUM LARGITORI

ÆTERNO, IMMENSO, IMMORTALI,

OMNIPOTENTI,

† 2

INEF-

INEFFABILI,  
INCOMPREHENSIBILI,  
INCOMPARABILI,  
**UNIVERSORUM**

ARCHITECTO, CONDITORI, CONSERVATORI  
BENEFICENTISSIMO,  
IN ÆTERNUM, ET ULTRA REGNANTI.

QUI EST

SUPER OMNIA, INFRA OMNIA, CIRCUM OMNIA,  
INTRA OMNIA, EXTRA OMNIA,

IN OMNIBUS.

UBIQUE PRÆSENTI, SED INACCESSIBILI,  
PER CUNCTA DIFFUSO, SED INDIVISIBILI,  
OMNIA MOVENTI, SED IMMOBILI,

*PRIMO, ET ULTIMO*

RERUM OMNIUM PRINCIPIO, ET FINI,  
IN MINIMIS MAXIMO, IN MAXIMIS SUMMO,

— XXI —

z †

CIR-



tiorum Mathematicorum beneficio, magis ac magis in dies per-  
 ficendas speramus. Quocirca summa sollicitudine omnino curan-  
 dum est, ut profundiores Geometrarum Theoriæ, quas perse-  
 jucundissimas, & de universo hominum genere tam bene meren-  
 tes experimur, assidue promoveantur, habitoque inter veras, &  
 (si quæ irreperint) falsas delectu, his confutatis confirmentur  
 illæ, atque ab obiectis fortasse scetupulis vindicentur. Hinc, cum  
 Clarissimi, inter præcipuos Inclytæ Nationis tuæ Mathematicos,  
 Joannis VVallisi PLUSQUAM-INFINITA spacia, quæ primus  
 ipse inter hyperbolas infinitas altioris ordinis, summa cum om-  
 nium admiratione, detexit, à nonnullis Regiæ Parisiensis Acadē-  
 miæ Geometris nuper in dubium vocati, tum apertè reuelandi  
 adverterem, operæ pretium futurum me existimavi, si rem  
 totam [ quæ maxime est in scientiis nostris momentè, ob con-  
 nexiōnem, quam cum methodo recendorum Analytarum Scientia,  
 hæc Infiniti fortitur ] iterum examini subicerem; & adyduum  
 Geometriæ lapidem exigorem, de tam celebri controversiâ deli-  
 beraturus: cumque VVallisi vestri partibus multiplex ab ipsa  
 veritate suffragium accedere deprehendissem, irrogatam Viro  
 gravissimo injuriam propulsandam, injustam immortalis ejus Nomini  
 labem abstergendam, ejusque doctrinam ab omni fallaciæ suspi-  
 cione hoc libello purgandam, Te potissimum hortatore, con-  
 stitui. Novos addidit operi stimulos ipsamet Illustrissima Regalis  
 Societas, à Serenissimo Rege Carolo II. ad naturales Scientias  
 promovendas fundata, dum me, obscurum, ac peregrinum hominem,  
 inter socios suos ultrò conscribendum censuit, measque, in  
 Armachani Præsulis systema sonorum, speculationes, Illustrissimo  
 Præside Isaac Nevvtono Equite aurato, Mathematicorum  
 nostri sæculi Principe, necnon Doctissimo Haulæo, in Universitate  
 Oxoniensi Professore Astronomiæ Saviliano, summè probantibus,  
 ejusdem Academiæ actis inferi, & inter philosophicas Transac-  
 tiones edi mandavit: cui quidem honori, ut aliqua ex parte,  
 me gratum ostenderem, nihil opportunius, & huic proposito ac-  
 comodatus occurrit, quàm si prelaudati VVallisi, qui Regiam  
 ipsam Societatem tantoperè illustravit, famam ab illata calumnia  
 defendendam hac Geometrica Disquisitione susciperem, quam,  
 meo nomine, eidem Amplissimo Academicorum Cæui communi-  
 candam, Tibi offero, Vir Illustrissime, atque Eruditissime, ut  
 mel simul erga Te obsequii monumentum aliquod apud posteros  
 ma-

maneat, nulla temporis injuria intercidendum. Nihil attinet, ut in Virtutum tuarum, hoc qualecunque venerationis testimonium, suo veluti jure exigentium, uberrimum campum excurrere orationem meam permittam, cum ipso etenim presentis Tractatus titulo amplissimi hujus argumenti fecunditas decertaret, neque in spatia PLUSQUAM-INFINITA laudum tuarum abduceret, ac dolorem denique nostrum, ex imminenti jacturæ timore conceptum refricaret, dum à Prudentissima Regina, meritorum tuorum sat conscia, eximii honoribus auctus in Patriam revocaris, omnium, quibus Eruditio, Doctrina, Facundia, Elegantia tua, cum summa Humanitate conjuncta, perspecta est, amorem tecum, & desideria simul asportaturus. Unum igitur superest, ut Te, qua licet fiducia, supplex exorem, ad libellum hunc benigna, qua soles, fronte excipiendum, ejusque Auctori, quibus ipsum dignaris, benevolentiae, & gratiæ tuæ officia jugiter continuanda. Vale.

Pisis, Pridie Kal. Februarii MDCCX.





# DE OPERIS ARGUMENTO Poeticum Præludium.



**Q**uidquid finitum transcendit, [1] & undique certo  
Se circumscribi limite non patitur,  
Visum erat et nostram pariter transcendere mentem,  
Viresque humani luserat ingenii.  
Ausus [2] *Aristoteles*, ausus [3] *Plato*, cuncta *Soporum*  
Turba [4] hoc immensum est traicere ausa vadum.  
Cum

**NOTE**) *Ut lucem aliquam materia per se obscurissima, ac Musis penè intractabili, conciliarem, explanationem ejus aliquam in his notis subdere visum fuit, & Amicorum consilia persuasere: qui seorsum faciendum duxerit, eas pro non adiectis habeat, pratereratque. Itaque (1) Infinitum cuiusvis generis hic intelligo, ejusque historiam penè universam hoc carmine complector. Illud, tamen nostrum captum excedere videtur, explicandum sibi sumpsit (2) Aristoteles in lib. 3. phys. asserens text. 24. ejus notitiam ad Physicam pertinere, & text. 25. ipsius naturam ab omnibus, qui accuratè philosophiam tradiderant, consideratam fuisse affirmans, atque in primis à (3) Platone, quem text. 27. narrat, duo Infinita posuisse, Magnum, & Parvum: quasi recentioribus Mathematicis præsenserit, qui infinitè magna, & infinitè parva excogitarunt. Omnes denique Philosophi Scholastici (4) de Infinito disputare*

Cum scopulis (5) luctata diù, sævisque procellis,  
 Irruit adversis obvia turbinibus;  
 Sed tumida imbelles lassavit ut unda lacertos,  
 Viribus effractis, vertere cogit iter.  
 Qui contra obsistunt, hos gurgitis ampla vorago,  
 Syrtibus allidens ossa, caputque, rapit;  
 At pauci hinc reduces, tenuere ubi littoris oram,  
 Instabiles, gressu sæpe labante, ruunt;  
 Nec nisi tricarum (6) male olentes denique spumas,  
 Inflatas buccis, quisquiliaeque vomunt:  
 Non numerare sinus, non explorare profundum  
 Plumbo, non fines posse notare datum est.  
 Subrogat hincce suos divina Mathesis (7) alumnos,  
 Et desperatum fortior urget opus.  
 Tuque Syracusæ tutela, & gloria gentis  
 Antevolans alios, ingeniose [8] Senex.  
 Assuetus vastam numero comprehendere (9) arenam,  
 Non modò quæ siculo littore sparsa jacet,  
 Sed maris, & terræ, stellarum, & totius orbis  
 Implerent quotquot grana minuta sinum,  
 Quamvis erat spacio contermina sine carenti  
 Congeries, paucis non referenda notis:  
 Quàm facilè & pelagus, quo extensio limitis expers  
 Clauditur, ingressus ducis in alta ratem!

Non.

*tare agresti, ob gravissimas, quibus involvitur, difficultates (5) hic allegoricè expres-  
 sas, quid profecerint, & quos fructus (6) demum inde reculerint, notius est, quàm  
 hic exponi aptius conveniat. Mathematicis (7) ergo Philosophus substituti ad Infini-  
 ti contemplationem, primusque [8] Archimedes Syracusius hoc vadam tentavit, (9)  
 qui multitudinem arenularum, totam firmamenti etiam Pythagorici capacitatem  
 implentium, in libro, cui titulus est Arenarius, computavit, ut Ge'oni Regi proba-  
 ret,*

## Prælium. 3

Non brevia, & cautes, non acroceraunia terrent,  
 Non venti, aut nymbi, aut monstra morantur iter.  
 Sed nostris subducta oculis vix inclyta puppis,  
 Metam omnem excedens, in via quæque secat,  
 Cùm subito emergit scopulorum immensa propago,  
 Quadrupla queis ratio, (10) forma tricuspis erat.  
 Hic magnus Gometra jubet consistere: & ultra  
 Quid properamus? ait: Sat mihi cuncta patent.  
 Jam video innumeros, quotquot sine fine quadrant  
 Succrescunt primo, limitem habere sui;  
 Nam triquetri series erit omnis [11] epitrita primæ:  
 Inde parabolici est area [12] nota loci  
 Portum igitur victor repetit, radioque magistro,  
 Tanti operis certa in littore signa notat.  
 Proximus huic, longo sed temporis intervallo,  
 Ingreditur vatum jam (13) Galileus iter;  
 Expediensque Tubum (14), quo tot portenta tetexit,  
 Uno Infinitum prospicit intuitu.  
 Scrutatur numeros, (15) quotquot mens fingere possit,  
 Illorum varios comparat inde gradus.  
 Radicesque [16] omnes, quadrata, cubosque retensens,  
 Nunc totidem (17), nunc se plura videre putat;  
 Nam

*ret, numerum arenarum Syracusi litore infinitum non esse. (10) Porro infinitam  
 seriem triangularum in quadrupla ratione decessentium, quam series triquetri  
 scopulorum, eandem rationem observantium, hoc loco exprimit, considerat Archime-  
 dei lib. de Quadr. Parabola prop. XXIII. eamque esse ostendit (11) sesquialteram  
 primi trianguli, inde (12) quadraturam parabolæ determinans, eo quod in similibus  
 triangularum, quadrupla ratione decessentium, infinitam seriem constituant. (13)  
 Post XVIIII. sæcula Galileus Galilæi Nobilis Florentinus Academicus Lynceus, M. D.  
 Eboraria Philosophus et Mathematicus (14) optici tubo, quo tam multa præter sæ-  
 cula spectacula in cælo detexit, inventionem celeberrimam (15) omnium possibilem nume-  
 ros exhaustos contemplatus est dial. 2. de nova Scientia (16) quærens, nam plures in  
 illis sunt radices, an quadrata, vel cubi, Nam (17) per unam partem latitudinem visentur,*

Nam cuivis numero (18) suus est cubus, atque quadratū  
 Cuique suum parili lege referre potes;  
 Rara sed in numeris [19] quadrorum turma, cuborum  
 Rarior occurfus, non totidem esse finit.  
 Ergo anceps animi Vir Lynceus hæret, (20) in Uno  
 Quærat, an in Multis quod sine fine vocant;  
 Unum etenim [21] sibi met radix, cubus, atq; quadratū,  
 Claudit inexhausto nomina cuncta sinu.  
 Ambigit et titulos (22) *Æquum, Magnusque, Mimusque*  
 Immenso in numero, aut mole, tenere locum.  
 Hos tamen evadit scopulos qui [23] post Galilæi  
 Signa, brevi cymba, ponē legebant iter,  
 Ex insectilibus (24) componere cuncta elementis  
 Arte (25) *Ca-vallerius* nobiliore potens.  
 Huic licet [26] innumeris sint corpora consita planis,  
 Plana infinitis consita lineolis,  
 Ipse figurarum [27] plana omnia comparat, omnem  
 Rectam hujus, rectis omnibus alterius;  
 Quin et ubi innumeras (28) aperit progressio partes,  
 Continuo seriem diminvente logo,

Non

*ex alia non totidem: [18] primum suadet perpetua correspondentia, cuiusvis radice cum suo quadrato vel cubo, (19) secundum avincem observatio, quod omnes numeri sunt radices, non omnes verò quadrati sunt, aut cubici, quorum tanto maior est infrequentia, quanto magis ab unitate ad altiores numeros ascendimus. Exhinc dubitat Galilæus (20) an non, potiusquàm in Multitudine, querenda sit Infinitas eorum in Unitate (21) qua sibi met quadratum, cubus, et qualibet suis ipsis potestas est. Imò suspicatur (22) titulus aequalis, & inæqualis non habere locum, ubi sermo sit de Infinitis. (23) Post vestigia Galilæi, qui methodo Indivisibilium specimen dedit Dial. 1. cit. ubi de cylindro per hemisphaerum excavato, et Dial. 4. in comparatione spatii motu accelerato, & aequali eodem tempore confecti, venisse visus est (24) Indivisibilium Geometria. Auctor (25) Bonaventura Cavalieri Mediolanensis, quæ licet [26] solida ex infinitis superficiebus, & superficies ex infinitis lineis contextas supponat, tamen (27) docet omnia indivisibilia unius figura omnibus alterius conferre, omnia simul plana in solidis, et omnes lineas in superficiebus comparans. Insuper (28) Infinitos terminos continuo decrescentes, necdum in ratione quadam [29] ut*

# Præliudium.

5

Non modò cū quadrupla est (29) Siculi ut doctrina Ma-  
 Prodidi, at quævis regnet in his ratio, [gistri  
 Ad certos semper docuit restringere fines, (30)  
 Notaque congeries integra facta fuit.  
 Flexilibus rectis (31) id Torricellius (32), inde  
 Gregorius [33] variis exposuere modis.  
 Quodque fidè superat, solidum (34) prior ille rotundū,  
 Infinita acies cujus hyperbolica est,  
 Mole sua ostendit finito æquale (35) cylindro,  
 Qui à centro ad solidi pertinet usque basim.  
 Inde alii (36) innumeras planas, solidaque figuras  
 [Slusius (37) hos inter, (38) Craigius, (39) Hugenius]  
 Quamvis in immensum quævis se extenderet axem,  
 Ad certi spatii signa venire iubent.

Rur-

(29) ut dudum Archimedes ostendit loc. cit. sed in qualibet geometrica progressionē procedent, idem Cavalieri (apud Torricell. De Dimens. Parab. Schol. post Lemma. XXII.) in unam summam (30) colligere docuit, quam demonstrat æqualem tertie proportionali post primam differentiam, & primam magnitudinem. Id verb (31) per flexilines rectarum sibi alternatim parallelarum triangulo inscripta elegantius probavit idem (32) Evangelista Torricellius Faventinus M. D. Etruria Mathematicus sub annum MDCXLIV. quod est, alio modo exhibitus Gregorius à S. Vincentio Soc. Jesu anno MDCXLVII. lib. 2. De Circuli Quadratura. (34) Invenit verò, ac pene tantum temporis, invidibile spectaculum Geometris præbuit Torricellius, Solidum nempe acutum hyperbolicum infinitè longum, ab hyperbola circa asymptotum conversa generitum, quod (35) ostendit æquale finito cylindro eidem basi adjacenti, suaque altitudine ad usque centrum hyperbola extenso, quem signat rectangulum asymptotico spatio inscriptum in eadem conversione. (36) Alii discept. post Torricellium, figuras infinitè longas, tam planas, quam solidas metiri ausi sunt, quos longum esse enumerare, Ut sunt Isaac Barrovius in lect. Geom. Joannes Ceva in Geometria Motus, Petrus Nicolus Soc. Jesu in Exercit. Geometr. Antonius Lalovera Soc. Jesu De Cycloide, Petrus Fermat Opuscul. posthum. Jacobus Gregorius in Geometria part. univ. David Gregorius in Exerc. Geom. Georgius Cheynus in Method. Fluxionum &c. tree autem solè carminis opportunitatē exprimere concessit, (37) Renatus Franciscum Slusium in Miscellan. (38) Joannem Craigium in method. quadrandi figur. (39) Christianum Hugenium, à quo et Cissoidis Dioclea dimensionem habemus apud VValisium in Schol. prop. XXIX. cap. V. Mechanica, & Spatii Logarithmici mensuram ad eadem Distributa de causa gravit. indicatam, quam nos in Hugenianis, cum extensione à Logarithmicis altitum graduum, & multè id genus aliis, demonstravimus

## 6 Poeticum

Rursus arithmeticas series quoque *Mengolus* (40) offert,  
 Quarum finis abest, integra summa datur;  
 Unam ubi dividitur (41) cunctis quadrifve, cubifve,  
 Omnibus aut planis, aut solidis numeris;  
 Quamlibet excedit sed tunc progressio metam,  
 Cū ratio (42) harmonica est, quæ sua membra secat.  
 Altius at penetrans pelagi tam grandis abyssum  
 Auctor inexhauste [43] *Vallis* Arithmetice  
 Ex Infinitis [43] PLUSQUAM-INFINITA recenset,  
 Et graduum series supputat innumerat.  
 Nascitur hinc varus rerum ordo (45) sine carentum,  
 Horret inaccessas rēns stupefacta vias.  
 Nec satis: in summè exiguis discrimina (46) *Newton*  
 Fermè eadem repert; (47) *Leibnāus*que simul;

Ille

*vinus.* (40) Simile quid in fractionibus numericis infinitis exhibuit Petrus Mengolus Bononiensis in Quadratorum arithmetica, earum summam accuratè colligens, & finitum esse ostendens, (41) quoties unitas denominatur, vel omnibus numeris quadratis, ut  $\frac{1}{4} \frac{3}{9} \frac{1}{25} \frac{1}{36}$  &c. [quæ series minor est  $\frac{1}{4}$ ] vel omnibus cubis, ut  $\frac{1}{8} \frac{2}{27} \frac{1}{64}$  &c. [quæ minor innuitur  $\frac{1}{8}$ ] vel omnibus planis numeris, ex duobus duorum quorumvis proximorum genitis, ut  $\frac{2}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{12} \frac{1}{20}$  &c. (quæ præcisè agnoscitur 2.) vel omnibus solidis ex duobus quorumvis trium sibi succedentium productis, ut  $\frac{1}{6} \frac{1}{24} \frac{1}{60}$  &c. (quæ præcisè adæquat  $\frac{1}{4}$ ) At verò infinitam esse summam ostendens, (42) ubi progressione harmonica fractiones decrescunt, ut  $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5}$  &c. At (43) Joannes V Vallis Geom. Professor Savilianus Oxoniæ in Arithmetica Infinitorum (44) Spatia Plusquam-Infinita etiam commemorat prop. 104. & 105. quæ scilicet infinitis superant areas jam infinitas; unde (45) patet, eodem jure spatia rursus infinitis majora consistunt plusquam infinitis evocitari posse, & alibi alia, a quibus hæc ipsa rursus infinites superent, & ita decrescit sine limite ad alia altioris ordinis infinita progrediendo. Similiter (46) Isaac Newton Eques Auratus eundem progressum in Infinitum parvis proponit, quibus alia infinites aequalia sint, atque ita parva, neque novæ naturæ licentem, ut ipse ait in Serol. Lemm. XL. suorum Principiorum Mathem. Philos. Et simile quid (47) Godefridus Guiguelmus Leib-



# Prælium. 7

Ille tamen fluxus [48] vocat, & momenta fluentium  
 Quantorum punctis (49) indicat impositis;  
 Quartam hic (50) litterulam adiciens ad symbola rerū,  
 Quis differre videt proxima quæque, notat.  
 Naturæ hinc secreta patent (51) mysteria utriusque,  
 Majus et à parvis maxima lumen habent.  
 Namque Catenarum (52) flexus, & Elastarum (53) arcū,  
 Quæve sinum pandant (54) turgida Vela notis;  
 Semita quæ gravium sit, (55) Isochrona sponte cadentū;  
 Et (56) Brachystochronas discimus inde vias.  
 Prodit, & hinc (57) variis moderatrix Regula motus,  
 Et vim (58) centrifugā (59) centripetamque regens:  
 Nec latec ista dies, (60) breviora crepuscula cui funde,  
 Nec, minimū obsistat cui mare, [61] forma ratis;

CUR-

Leibnitzius excogitavit, cum hoc *Asymptota*, quod Newton *quantitates infinitè exiguas* (48) Fluxiones vocat, seu Momenta, aut momentanea incrementa, vel decrementa quantitatum, quas Fluentes, id est continuas successione crescentes, aut decrecentes concepit: easque fluxiones (49) puncto ad rei fluentis symbolum superimposito designat, ut si fluens sit  $x$  vel  $y$ , fluxiones earum sint  $\dot{x}$  &  $\dot{y}$ . At Leibnitzius (50) addidit litteram quartam, seu characteristicam  $d$ , nam has particular infinitè parvas Differentias vocat, itaque ipsarum  $x$ , &  $y$  differentia notantur per  $dx$ , &  $dy$ ; quin et posteriores fluxionum fluxiones duplici puncto imposito per  $\ddot{x}$  &  $\ddot{y}$  indicat ille, per characteristicam  $d$  exprimit iste, ut  $d^2x$ ,  $d^2y$ , atque ita multiplicando punctum, vel characteristicam extra quantitates infinitè parvas altiorum graduum denotantur (51) Multa hinc *Physicomathematica Problemata*, Veterum Methodo imperitia, soluta sunt: Nempè (52) Curva Catenaria, seu funicularis, quam catena suspensa simulatur, (53) Curva Ellastica quam lamina Elastarum se evoluentium designant; (54) Curva Velaria, in qua tumida vela sinuantur, (55) Curva Isochrona per quam grave descendens aequaliter, aequali tempore, ad datum punctum accedit, (56) Curva Brachystochrona, sive celerissimi descensus gravium ex dato puncto ad datum punctum; Item (57) Regula motuum, utcumque vario velocitatis incrementi, aut decrementi procedentium, (58) Leges quoque Vis centrifugæ, hoc est visus ad centro recedendi in qualibet curva, quam mobile deseribat, & (59) Vis centripetæ sive impetus urgentis mobile in aliquod centrum, quarumque proportionem variis supponatur in accessu, aut recessu à tali centro (quarum visum utramque generali nomine Vitium centralium comprehendit Cl. Varignonius in *Altit Academia Regia*, ubi præclara multa de his, & de motuum Regulis ostendit) [60] Dies quoque brevissimi, seu Minimi crepusculi determinata, itemque (61) figura Navi-

Curvarumque licet (62) mēsuras nosse, (63) recursus,  
 (64) Flexus, (65) Cōtactus, (66) Oscula, (67) Centra, (68) Focos.  
 Signaque in his radii quę lambant (69) caustica, dum lux  
 Sive refracta subit, sive reflexa redit;  
 Et quacunque basi subnixa figura rotetur,  
 Quas gignat punctum mobile [70] Cycloidas;  
 Tum quę se evolvens, [71] post se vestigia linquat,  
 Dūm curva amplexus deserit ipsa suos:  
 Et quidquid (72) *Bernulliadum* par nobile fratrum,  
 Aut [73] *Hospitalius*, (74) *Tschyrnburnius*, [75] *Facius*  
 Inferere tuis, celeberrima (76) *Lypfia*, in Actis,  
 Dum methodi illustrent dogmata prima novę.  
 Limitis expertum quantorum Analysta (77) repugnat  
 Sed *Nieuventius*, nec satis ista probat;  
 Omne etenim augmentū [78] et graduū discrimina quęq;  
 Ex Infinito reiicienda putat;

Re-

*gii* Minima resistentia inter omnia, qua in eodem fluido moventur (62) Curvarum rectificatio, & arcuum ab eis comprehensarum dimensio (63) Puncta reversionum, in quibus curva aliquot retorquentur in eandem partem, unde venerant (64) Flexus contrarii, ubi è concavis convexe sunt (65) Tangentes ejuſſeivi curva imaginabilis (66) Circuli osculantes, idest maximi, qui ad datum punctum curva inscribi possunt. (67) Centra varia, ex quibus curvę describi possunt spe silarum, (68) Foci tam indivisibiles, tum lineares eorundem curvarum. (69) Curvę Caustica sive ex reflexione, sive ex refractione radiorum lucis progenita, quas scilicet iidem radii perpetuò tangunt. (70) Cycloides orta ex quavis curva super quolibet aliam rotata; Item (71) Curvę ex Evolutione sili aliam curvam circumplellentis, more Hugeniāno, generata &c. (72) Joannes, & Jacobus Bernoullii fratres, ille Chroninga, hic Basilea Mathem. Professores longe clarissimi. (73) Guglielmus Franciscus Marchio de Hospitalio insignis Geometra, qui methodum infinitę parvarum preclarę *Analysi* Des infinitum petiti illustravit. (74) Eberhardus VV altherus de Tschyrnburnium celeberrimus Mathematicus, auctor Medicinę mentis & corporis, atque ingentium Vitruvianæ Causlicorum inventor. (75) D. Facio De Duilliers (76) Acta Eruditorum Lypfii ab anno 1681. & deinceps publicata, in quibus alia complura hęc pertinetia occurrunt, qua, brevitate studentes, omittimus, cum bacenus adducta, commendando methodo huius petri, abunde sufficiant (77) At Bernartus Nieuventius in *Analyſi* Infinitorum anno MDCXC. edita hunc ultieriorum in infinitę parva progressi reiect & improbat. (78) Nam Infinito quidpiam addi posse ne-

# Præludium. 9

Rerum etiã minima (79) admittit, quæ prima vocantur,  
 [80] Decrementa sed his ulteriora negat.  
 At tu, (81) Antennoræ mox Palladis ornamentum,  
 [82] *Hermanne* huic causæ porrigis ultor opem,  
 Et reperta (83) Viri eximii argumenta refellens,  
 Magna et Parva [84] omnes cogis habere gradus.  
 Sola (85) *Varignonis* PLUSQUAM-INFINITA moratur,  
 Quæ spatium tribuit *Vallis* hyperbolicis.  
 Ille etenim (86) absurdum quiddam, atque affine Chymicæ  
 Sub tam magnifica voce latere putat.  
 Tu quoque derides nomen tam grande (87) *Parentii*,  
 Et Geometrarum è classe [88] valere jubes.  
 Si tamen aspiret exceptis fortuna fecundis,  
 Et regat hæc trepidum lubrica arena pedem,  
 Dogmata [89] *Vallis* per me inconcussa manebunt,  
 Stabit hyperbolicis [90] multiplex ordo locis.  
 Parvorum tamen omne genus, [91] variisque deinceps  
 Magnorum classes, ante referre juvat, Fon-

gat, ac quadratum, cubum, cæterisque gradibus Infiniti numeri respicit (79) antea  
 & consequenter, primas quidem differentias, seu partes infinitesimalis primæ gradus  
 admittit, sed (80) ulteriorem differentiationem, id est secundas, ac tertias diffe-  
 rentias procul ablegandas censet. At (81) qui nunc Urbis Patavina ab Antennore  
 fundata Cattedram Mathematicam moderatur (82) Jacobus Hermannus Hoffmannus,  
 variis geometricis Speciminibus in *Actis Lipsiæ*, & in *Ephemeridibus Philosophicis*  
 suo merito, celebratur, calculus infinitesimalis causam ultius est, & (83) *l'Évêq.* au-  
 versus Considerationes secundas *Nieuwentyii*, anno 1700 *Basilæ* promulgavit, (84)  
 ad omnem dignitatem evadere posse tum infinitè magnas, tum infinitè parvas quanti-  
 tates ostendit. (85) *Scrupulum* tamen iniecerit D. *Varignonis* Spatiis Plusquam-  
 Infinita, quæ *Vallis* inter hyperbolas altioris gradus agnovit; hæc signum (86) mes-  
 ciquod contraditionis involvere *Varignonius* credidit: Un plus que infini, inquit  
 in monumentis Acad. Regiæ anni 1706. m'a toujours paru renfermer une contra-  
 diction (87) Sed et D. *Parent* part. 3. *Disquis. Phys. & Mathem.* novam hæc  
 Plusquam Infinitorum denominationem à Geometris exulare cupit: cellæ etiam, ad huc  
 nos plus qu' Infinitis. Deo tamen auspicio (88) *Doctrinam VVallis* hæc in præposito vin-  
 dicandam suscipimus, & (90) multiplicem illum Infinitorum ordinem in ipsis hy-  
 perbolicis, quæ *Vallis* consideravit, necessariè admittendum demonstrabimus: at-  
 que hoc præcipuum erit nostræ hujus tractationis scopus, (91) tametsi ad ulteriorem scien-  
 tiam, multò generalitèr hoc ipsum argumentum De Infinitis Infinitorum, & Infinitè

Fontibus (92) è propriis fluat ut tam nobile Verum,  
 Atque hauſtu recreet liberiore ſitim.  
 Hinc lux [93] uberior, vis firmior, amplior uſus  
 Accedit methodis, præſidiumque novis.  
 Nec jam deſpicias, (94) quòd tangens ſuppleat arcus,  
 Aut curvæ areolæ Zonula recta vicem,  
 Et laterum innumera ſerie (95) polygonon habebis,  
 Flexa ubi continuum linea ducit iter:  
 Plurimaque (96) in Phyſicis rerum miracula diſces,  
 Invenient certam jam paradoxa fidem:  
 Totū Animal minimi ut tegit ovi anguſta (97) cicatrix,  
 Integra ut exiguo in ſemine Planta latet.  
 Explicat implicitas (98) tantum generatio partes,  
 Auſtio diſtendit, perficit, ornat opus:  
 Nec, quæ ſuccedunt præſcis [99] nova ſemina, terrent,  
 Dum renovant fructus tempus in omne ſuos.  
 Nam ſumme exiguis (100) ſine fine minora, per omnes,  
 Ad ſenſum veniunt, ducta ſubinde gradus:  
 Increpat inſucti ſed Apollo carminis auſum,  
 Noſtra jubens, poſita, ſumere ſigna, chely.

*Parvorum Ordinibus verſare, (92) & ipſos hujus doctrina fontes aperire eurabimus; (93) ad novas methodos illuſtrandas, & confirmandas. (94) Licet deinceps arcum iuſtit? parvum pro recta eius tangente ſumere, & curvæ (95) quæ ſtrilinea inſinitè parvæ latitudinis pro reſt angulis inſcriptis, aut circumſcriptis computare: ipſaque curvas pro (96) polygonis inſinitorum numero laterum ſummè exiguorum habere (ut Galilæus, ante omnes de Circulo hoc propoſuit). Multa etiã (97) qua in Philoſophia paradoxa videbantur, credibilia ſcent, ut Animalis in Ovo, & Planta in Semine præexiſtencia cum omnibus organiſis partibus, qua (98) evolvantur dumtaxat per generationem, & per nutritionem amplius. (99) Nec terrere nos debet ſeminum, & fruſuum, quævis annos prodeuntium, multiplicitas: Nam (100) admiſſis variis inſinitè parvorum ordinibus, concipere poſſumus, omnia in ſemine contenta ex uno ad alium gradum ſubinde promovri: ut ſenſe dum ad ſenſibilem magnitudinem perveniunt qua erant in primo gradu inſinita parvitatibus, ſuec: dant ad hunc primum gradum qua erant in ſecundo, & ad ſecundū qua erant in tertio, & ſic deinceps. Quod valet etiam de Plantulis, que in ſem: nullis primo ſemine contentis latent: cui ſuis inſinitis albus minoribus ſeminalis, continentibus plantulas aliis inſinitis minoras, atque ita in inſinitum.*



# EXPOSITIO CONTROVERSIÆ

*Circa magnitudines Plusquam - infinitas , quæ præsentis  
tractatus editioni præbuit occasionem.*



Eleberrima est spatiorum plusquam infinitorum , quæ in hyperbolis altiorum graduum supra Apollonianam , ad alteram asymptoton remanent , consideratio. Hanc denominationem illis inditam voluit ante omnes alios Cl. VVallisius *Aritbmet. Infinit. prop. 104. 105. &c. & in Mechan. cap. 4. prop. 7.* Quod ipsum & nos , *Hugenian. cap. 4. n. 12.* ab eodem VVallisio optimè observatum tradidimus , & potest ex his , quæ *ibidem cap. 8. n. 11.* generatim ostendimus , facillimè demonstrari.

Nimirum ex ibi dictis patet, quòd si inter asymptotos  $A C$ ,  $C B$  sit hyperbola Apolloniana  $A g D G B$ , cujus nempe ea sit proprietas, ut ratio quarumvis ordinarum  $D K$ ,  $G E$ , sit æqualis rationi abscissarum à centro reciproce sumptarum  $E C$ ,  $C K$ , erit spatium post quamlibet ordinatam  $D K$ , asymptoto  $K B$ , & curva  $D G B$  indefinitè productis interjectum, magnitudinis absolute infinitæ, quippe quæ ad inscriptum parallelogrammum  $C K D N$  erit ut  $1$  ad  $o$ , quæ ratio est infinitè magna, seu major qualibet assignabili.

Sin autem talis hyperbola  $A h l D L H B$  in eisdem asymptotis per idem punctum  $D$  inscribatur, cujus ordinarum  $D K$ ,  $H E$  ratio sit duplicata rationis abscissarum reciproce sumptarum  $E C$ ,  $C K$ : nempe cujus ordinatæ sint ut quadrata distantiarum distantiarum reciproce accepta: tunc spatium post ordinatam  $K D$ , asymptoto  $K B$ , et curva  $D H B$  ad partes  $B$  indefinitè productis interjectum, præcisè æquabitur eidem parallelogrammo  $C K D N$ , quippe ad illud erit ut  $1$  ad  $1$ . Et si ordinarum ratio reciproce rationis abscissarum triplicata foret, adesset illæ harum cubis è contrario responderent, haberetur hyperbolicum spatium post ordinatam  $K D$  similiter ad partes  $B$  in infinitum excurrent, subduplè ejusdem parallelogrammi  $C K D N$ . Atque ubi ordinarum ratio reciproce abscissarum rationis quadruplicata foret, prodiret spatium illud hyperbolicum subtripulum hujus parallelogrammi, atque ita in reliquis procedendo.

Adco



## Controversiæ. 13

Adeoque generatim si ratio ordinarum sit ad reciprocam rationem abscissarum, ut  $x$  ad  $y$  (vel, quod eodem redit, si ordinarum potestates, ab exponente  $y$  denominatz, respondeant reciprocè potestatibus abscissarum ab exponente  $x$  indicatis) semper spatium hyperbolicum post unam ordinatam, asymptoto et curvæ in infinitum productis interiectum, reperitur esse ad inscriptum parallelogrammum, ut  $y$  ad  $x - y$ ; Sic enim in prima Hyperbola Apolloniana, ubi utraque ratio, tam ordinarum, quàm reciproca abscissarum, æquatur, adeoque  $y$  ad  $x$  est ut  $1$  ad  $1$ , erit spatium hyperbolicum ad parallelogrammum, ut  $1$  ad  $1 - 1$ , sive ut  $1$  ad  $0$ . In secunda hyperbola, in qua prima ratio est duplicata secundæ, fiet  $x$  ad  $y$  ut  $2$  ad  $1$ , & proinde ratio spatii hyperbolici ad parallelogrammum, ut  $1$  ad  $2 - 1$  sive ut  $1$  ad  $1$ . Ubi verò prima ratio sit triplicata secundæ, adeò ut  $y$  manente  $1$ ,  $x$  evadat  $3$ , erit spatium ad parallelogrammum ut  $1$  ad  $3 - 1$ , sive ut  $1$  ad  $2$ , atque ita deinceps.

Adeoque cum hæc lex semper obtineat, utpotè fundata in ratione subtangentium, quæ semper sunt ad distantias ordinarum a centro, ut exponens potestatis ordinarum  $y$  ad exponentem potestatis abscissarum  $x$  (sive ut harum ratio ad rationem illarum) per dicta Hugeniolorum *cap. 7. n. 9.* consequens est, ut in hyperbolis  $AfDFB$ , si viceversa abscissarum  $EC$ ,  $CK$  ratio duplicata, aut triplicata fuerit reciproquæ rationis ordinarum  $KD$ ,  $EF$ , utpotè si harum quadrata, vel cubi &c. sint reciprocè ut distantiarum earundem à communi centro (quod in iisdemmet hyperbolis supra consideratis evenit, si modò ad alteram asymptoton referantur, ut distantiarum in ordinatas, & ordinarum in distantias muteatur, adeoque  $y$  ad  $x$  sit ut  $1$  ad  $1$ , vel ut  $3$  ad  $1$ , &c. etiam ratio hyperbolici spatii post unam ex dictis ordinatis juxta suam asymptoton, cum ipsa curva, infinite productam extensi, ad inscriptum paral-

## 14 Expositio

pa. allelogrammum erit, ut  $y$  ad  $x - y$  hoc est ut 2 ad 1 - 1  
(nempe ut 2 ad - 1, sive ut 1 ad  $-\frac{1}{2}$ ); vel ut 3 ad 1 - 3

(ideft ut 3 ad - 2, sive ut 1 ad  $-\frac{2}{3}$ ) & sic de aliis; quæ

ratio cùm major fit ratione 1 ad 0 (ob consequens minus, quàm 0) fitque 1 ad 0 ratio simpliciter infinita, constat majorem rationem spatiorum, de quibus loquimur, ad inscripta parallelogramma esse *plusquam infinita*; & ided dicta spatia merito à Cl. V Valliis *plusquam infinitis* nomine fuisse appellata.

Nuperrimè tamen scrupulum super his in Gallia subortum intelleximus; Nam anno 1700 D. Carrè in *methodo mensura superficierum &c. sect. 1. coroll. prop. 23.* cùm intulisset, spatia hyperbolica, quorum index potestatis ordinarum  $m$  fit minor unitate accepta pro exponente distantiarum a centro, esse *plusquam infinita*: in margine monuit, se ita appellasse, ne à communi, & vulgari loquendi modo recederet, cæterùm à nonnemine opportunam rei huius explicationem propediem expectandam: *c' est pour parler le langage ordinaire, que je me sers du mot de plus qu'infini. Une personne doit nous donner au premier jour un éclaircissement sur cette matiere.*

Tum anno 1705 D. Parent in *Disquisit. Phys. & Mathematicæ. tom. 1. part. 3. pag. 552.* hunc ipsum locum D. Carrè ad censuram vocans, postquàm ejus calculum reformare aggressus est, nostrum hoc plusquam infinitorum genus, per jocum, valere jubet: *cela étant, adieu nos plus qu'infini*: & velut ægide tulerit vel denominationem illam, quasi *vulgè usurpatam*, à D. Carrè indicari, quam, utcunqæ magnificentiam, novam tamen, aut saltem inutilem esse sibi periuadet, hæc subdit: *Mais quelle utilité tirerons nous de ces grands & nouveaux termes, qu' on nous donne pour des termes triviaux?*

Tan-



## Controversiæ. 15

Tandem anno 1706 Cl. Varignonius expressè VVallium hac in re sibi confutandum proposuit in *Moum. Phys. & Mathem. Regia Academia Parisiensis die tertia Februarii ejusdem anni*: Postquam enim retulisset, laudatum Scriptorem Anglum, dum spatia, quæ hyperbolis, & ipsarum asymptotis interjiciuntur, ad mensuram vocat, ob dimensionem quorundam ex his spatiis per negativas magnitudines expressam, eadem *plusquam infinita* credidisse, subdit: „ sibi magnitudinem plusquam infinitam nescio quid contradictionis semper includere visam fuisse; unde ad inquirendam mysterii hujus enodationem excitatum esse: atque omne mysterium evanescere debere confidit, ubi ostenderit, Authoris hujus expressionem pro spatio plusquam infinito, ne quidem spatio simpliciter utcumque infinito competere, sed tantum finito, quod quidem spatium verè infinitum ad alteram partem residuum compleat; adeoque hyperbolas cum asymptotis suis non comprehendere spatia plusquam infinita, ut Author ille contendebat: atque hanc demum esse explicationem illam, quam D. Carrè in suo Libro de Calculo integrali super hac materia proditura (ante sex annos scilicet) promiserat „ En ejus verba, uti habentur in dictis Academicæ monumentis anni 1706. pag. 15. editionis Amstelædamensis.

*Monsieur Vallis eberchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles, & leurs asymptotes, & aiant trouvé pour l'expression de quelques uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a cru qu'ils étoient plus qu'infins. Mais comme un plus qu'infini n'a toujours pu renfermer une contradiction, cela m'a déterminé à chercher le dénouement de ce mystere, qui cessera d'en être un, dès que j'aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l'expression d'un Espace plus qu'infini, n'est pas même, celle d'un infini, mais seulement d'un Espace fini, qui est à la vérité le complement d'un Espace infini; & qu'ainsi les hyperboles, & leurs asymptotes ne renferment point d'Espaces plus qu'ins.*

qu' infinis, comme cet Auteur l'a prétendu. C'est là l'claircissement que a été promis dans le Livre de M. Carré sur le Calcul Integral.

Hinc post traditam doctrinam suam de quantitibus negativis, non magnitudinem plusquam infinitam in hoc proposito denotantibus, sed prorsus finitam, ad partes tamen contrarias de more accipiendam, concludit. „Tantum abesse, ut hyperbolæ altioris ordinis supra Apollonianam spatium plusquam infinitum comprehendant, quod potius ipsius Apollonianæ hyperbolæ spatium censei possit magis infinitum spatio ab aliis comprehensio, quippe illud ex utraque parte, hoc verò ab una dumtaxat parte infinitum comprehenditur, „ ait enim: *D'où l'on voit que l'espace ACBGA (hyperbole nimirum ordinis in suspensioni figura) des deux infinis de part & d'autre; & par conséquent plus infini (pour ainsi dire) que les précédens ACBFA, & ACBBA (altiarum nempe hyperbolarum); qu'on en verra de voir ne l'être, que par obéissance au côté. Donc si l'on fait bien qu'il n'y a point plus qu'infinit.*

Hos autem Ck Vallisii doctrinam, & expressionem vindicantes, ostendemus, revera hyperbolas altioris ordinis supra Apollonianam, ex una parte licet finitum spatium comprehendant, ex alia tamen usque ad id spatium plusquam infinitum continere, ut etiam infinitis majus sit spatium ab Apolloniana hyperbola contento: adeo spatium Apollonianæ hyperbolæ, licet utraque ex parte jam infinitum, quantumvis adhuc multiplicatum, semper minus ostendatur quovis spatio ad unam asymptoti partem ab altioribus illis hyperbolis contento, & qualibet etiam aliquota ipsius parte: ac demum ita comparari debere spatium infinitum hyperbolæ Apollonianæ ad ea spatia, que ab altioribus comprehenduntur, ut quædam finita quantitas ad infinitam, vel ut e. ad 1. Usque ad id verum est, spatia illa plusquam infinita censei debere, & Vallisianam

## Controversiæ. 17

nam illam denominationem, velut optimo fundamento nixam subsistere, meritòque adhuc ab omnibus esse retinendam.

Enimverò hoc ipsum, quod nos de spatiis illis hyperbolicis demonstraturos recepimus, sufficere, atque illud usq̄ requiri, ut spatium quoddam plusquam infinitum habeatur, falsus est Auctor Historiæ ejusdem Academiæ Regiæ anni 1706 in hujusmet controversiæ enarratione, & Varignonianæ dissertationis recensione, optimè animadvertens: „ Plusquam infinitam non censei magnitudinem, quæ alia infinita utcumque sit major, cùm infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationem, alit̄ aliis majores, aut minores esse possint, absque eo quoddam ordinem infinitorum excedant, perinde ac finitæ quantitates juxta quamvis rationem auctæ, vel imminutæ, finitorum ordinem non transcendent; sed illas plusquam infinitas magnitudines demum censendas, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem superiorem fuerint elevatæ, ut accidit finitis magnitudinibus, ubi ad ordinem infinitorum transferint. „ En ipsa eloquentissima verba Historici prælaudati pag. 60. Batavæ editionis: *Car ce qu'on nomme ici plus qu'infini, ce n'est pas une grandeur infinie plus grande qu'une autre infinie: les grandeurs infinies peuvent être plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l'ordre de l'infini, de même que les grandeurs finies ne sortent pas de l'ordre du fini pour varier entr'elles selon tous ces rapports. Mais ce qu'on entend par des grandeurs plus qu'infinies, ce sont des grandeurs qui sont sorties de l'ordre de l'infini doivent s'élever à un ordre supérieur, comme font les grandeurs finies lorsqu'elles passent à l'ordre de l'infini.*

Idipsum & Auctor Diarii Parisiensis in *suplemento ultimi Februarii* 1708, hanc historiam, & controversiam recensens, repetit totidem penè verbis: deinde adicit: „ Quod si plus-

C

quam

quàm infinitæ magnitudines admittantur, ordo quidam altior ipfomet infinito erit excogitandus, atque inducendum, non modò unum infinitum simpliciter alio majes, sed genus quoddam magnitudinum, quæ Infiniti ordinem prætergressæ ad superiorem alium ordinem eleventur „ *Sicco, qu'on appelle dans cet article Grandeurs plus qu'infinies, avoit lieu, il faudroit reconnoître un ordre plus elevé que celui de l'infini, & admettre non pas simplement un infini plus grand qu'un autre, mais des Grandeurs sorties de l'ordre de l'infini, & elevées à un ordre supérieur.* Tum notabilem hanc animadversionem subiicit, qua „ non omnino reiiciendas plusquam infinitas magnitudines (adèdque nullam contradictionem, qualem in ipsiùs Varignonius fingit, absolute involvere) ex Geometrix transcendens principis, varios infinitorum ordines agnoscentis, apertè innuit: verùm in hoc speciali proposito hyperbolarum VVallisii, omne plusquam infinitum jure à Varignonio reiici statuit, quippe illarum expressio à VVallisio adducta, ne quidem pro simpliciter infinito, (medum non pro plusquam infinito) sed purè finito spatio fuerat accipienda „ *Quand les principes de la Geometrie transcendante ne peussent voir pas de rejeter absolument l'idée de differens ordres d'infinis, M. Varignon auroit toujours raison de la rejeter dans la question présente. En effet il fait voir, que ce que M. VVallis a pris pour l'expression d'un espace plus qu'infini, n'est pas même l'expression d'un espace infini; l'espace exprimé étant purement fini.*

Me igitur operæ pretium facturum existimavi, si rem ipsam aliùs repetens, varios tum Infinitorum, tum infinitè parvorum ordines, quos profundior Geometria, quæ nunc temporis in usu est, ac per infinitè exigua magnitudinum elementa procedere solet, ex omnium fermè Geometrarum, qui ejus principia degustaverint, confessione agnoscere necessariò debet, demonstrare, & quàm dilocidè fieri poterit, exponere aggredere, speciatim verò Hyper-

## Controversiæ. 19

perbolarum VVallisii *plusquam infinitarum* non unam, sed multiplicem purè geometricam demonstrationem in medium afferem, quæ nullis Calculi ambagibus imponere, cuiquam possit, nullisque cavillationum technis eludi: adeo non magis excipere queat Varignonius, expressionem horum spatiorum invertendam, et ad aliam partem, negativo in positivum transeunte, ac plusquam infinito in purè finitum converso, esse sumendam, quàm si contenderet, quæ de Triangulis ostendit Euclides, esse de Circulis, aut Parallelogrammis intelligenda.

Veniam, ut spero, dabit conatibus nostris Cl. Varignonius, cujus præclarissimæ famæ, quam sibi tot mechanicis, ac geometricis, & analyticis egregiis speciminibus, immortalæ planè memoria dignissimis, peperit, nihil idcirco detractum volo, dum Collegæ nostrî VVallisii honorem, & Illustrissimæ Regiæ Societatis nostræ Decus, ac Veritatis ipsius pretium hac in parte vindicare contendo: simulque tum ipse, tum profundiores alii Geometræ permittent, ut me vel Tyonum captui accomodans, doctrinam hanc minutissimè exponam, ea ipsa, quæ tamquam vulgatissima habentur, ex suis velut principis exactè demonstrans, ne quid fortassis obrepat, quod minus assuetis ad hæc profundiora Matheosos mysteria mentibus ullam falsitatis suspicionem possit ingerere; liberum enim cuilibet futurum erit, ut ea quæ facillima, & sibi notissima sunt, statim transiliat, atque in his dumtaxat, quæ propositæ controversiæ punctû propiùs concernunt, examinandis, tempus infumat.

Hortandus interim mihi est Lector Geometra, ne inter inanes, ac nulli usui profuturas meditationes, nostram hanc de Natura Infiniti, variisque ejus classibus, quas pauci hætenus animadvertere, ac distinguere potuerunt, collocandam censeat; nam præter egregios fructus, quos probè instituta mens ex hujusmodi considerationibus ad Divinorum contemplationem sibi derivare faciliè potest, qua-

tenus nihil æquè idoneum est in Dei Opt. Max. ejusque summarum perfectionum notitiam ( quantum naturæ viribus assequi datur ) nos promovere, atque in ejus incomprehensibilis Sapientiae, omnemque vastam licet, ac ultra quoslibet, terminos extensam ideam, immenso intervallo superantis Potentiae admirationem inducere, ac serâ Infinitorum discussio: præter hos, inquam, egregios sanè, ac præstantissimos fructus, aliosque non abimiles ad vitam rectè, moderatèque instituendam pertinentes, quibus vel solis quidquid ad Infiniti Naturam enucleandam, ejusque proprietates aperiendas collimat, satis commendaretur, innumera ex eodem hoc fonte in universam Mathematicam, & Philosophiam præfluere emolumenta is unus diffiteri poterit, qui usdem percipiendis impar extiterit; Nam, exempli causa, Circuli, & Hyperbolæ quadratura, quæ tot in diis tentata, quoslibet Geometrarum conatus per tam multa sæcula pertinaciter elusit, tandem ab infinita terminorum serie pendere deprehensa est, ut in nostro Libello *Quadratura Circuli, & Hyperb.* anno 1703 Pisis edito geometricè demonstravimus. Innumeri naturales effectus in Physica adhuc ignoti manent, quod infinitam principiorum seriem, à qua fortasse dependent, ignoremus. Totam Geometria Infinitè parvorum methodo nunc perficitur, & in immensum ultra fines à Veteribus constitutos ampliatur: perfectioni autem tam nobilis Scientiæ connecti et perfectionem Philosophiæ, atque hanc pari passu cum illa in dies promoveri, quis nesciat? Verùm hæc alibi fusiùs, & opportunè: ad rem ipsam veniamus.





# DE INFINITIS INFINITORUM,

ET INFINITĒ PARVORUM.

ORDINIBUS.



DEFINITIO I.

**R**ATIONES assignabiles dicuntur, quibus aequales, aut quamlibueris proximae, per posteros numeros, possunt exhiberi.

SCHOL. Comprehendit hæc definitio etiam rationes asymmetrarum magnitudinum, ut diametri ad latus quadrati, vel lateris trianguli æquilateri ad ejus perpendicularum &c. quæ licet numeris exprimi nequeant, ostenduntur tamen quibusdam numericis rationibus majores, quibusdam minores, adeoque intra certos limites continentur, intra quos etiam possumus propositæ rationi quamlibueris proximam per numeros exhibere, juxta ea, quæ demonstravimus in *Hugenianis cap. 3. n. 3.*

DEFI-

## DEFINITIO II.

*Magnitudines absolute Finitas voco, quas vulgò tractamus, quaque ad similem nobis notissimam quantitatem, in nostro saltem corpore determinandam, rationem assignabilem obtinent.*

SGHOL. Quaslibet magnitudines digito, palmo, pede, vel ulna, nimirum humani corporis partibus, ad certam quamvis mediocrem quantitatem, inter tot varias, publica auctoritate, taxatis, metiri omnis natio consuevit: itaque hoc est modo ad corporis nostri molem, cetera corpora, ad nostram superficiem ceteras superficies, ad nostram altitudinem ceteras lineas, ad angulum, quem altitudo nostra cum horizontali secta comprehendit, ceteros rectilineos angulos, ad nostrum pondus ceterarum rerum gravitates, ad nostram vim ceteras potentias, ad nostræ vocis tenorem ceteros sonos, atque ita de reliquis, referre non immeritò possumus, velut ad magis obviam, magis naturalem, nobisque notissimam mensuram, ad quam certè quzlibet finitæ quantitates ejusdem generis, quas vulgò tractamus, assignabilem aliquam obtinent rationem.

## DEFINITIO III.

*Magnitudines absolute Infinitas voco, quæ ad finitam quamlibet sui generis magnitudinem rationem habent majorem qualibet assignabili.*

SGHOL. Non contendimus, talem aliquam magnitudinè seipsa existere, vel aliquando extituram, sed ipse progressus quantitatum, certa quadam lege, crescentium, menti nostræ occasionem præbet, illas sine limite augendas, & ultra quamvis datam magnitudinem ampliandas concipiendi, quarum itaque ratio ad quamlibet finitam sui generis quantitatem, major semper, & major evadat, quàm quzlibet

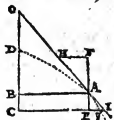


libet ratio assignabilis: ita conica superficies, ejusque sectiones parabolicae, & hyperbolicae, suapte natura infinitae sunt, quatenus semper augeri, extendique ulterius, addoque omnem finitam superficiem superare concipi possunt; licet interim quidquid ex illis determinate acceperimus, semper non nisi finitum futurum sit, in eo autem dumtaxat, quod accipiendum superisset, tota Infinitas lateat. Neque enim fieri potest, ut magnitudo undique circumscripta, & limitata, pro absolute infinita habeatur: quare licet parabolae, exempli causa, axis in infinitum protensus sit absolute infinitus; non ideo concipi potest, velut longitudo binis punctis; quantumvis distantibus, intercepta, sed ex una dumtaxat sui parte, nempe ad punctum verticis, unde originem suam ducit, determinata, ad aliam vero partem termino, & sine carens, utpotè sine limite semper augenda.

DEFINITIO IV.

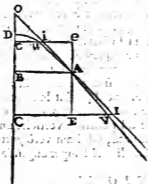
*Magnitudines absolute infinitè parvas intelligo illas, quae ad finitam sui generis magnitudinem habent rationem minorem, quam libet assignabili.*

SCHOL. Has magnitudines infinitè parvas Cl. D Leibnitzius *Differentias*, vel *Elementa variabilium* quantitatù vocavit: Illustriss. Eques Newtonus *Fluxiones*, seu momentanea incrementa, aut decrementa magnitudinum, continuo quodam fluxu crescentium, aut decrescientium, antea appellaverat: Multis placet easdem *Infinitesimos* magnitudinù partes dicere; quae ut intelligantur, concipiatur recta BA per axem DC curvae DAV, sibiimet parallella manens, moveri, atque interim continuè crescat, aut minuatur, prout opus est, ut



ad

ad curvæ perimetrum altero extremo pertingat; ducta ergo  $AE$  axi parallela, si imaginemur [ licet, ad confusionem vitandam, has aliquantulum disitas figura exprimat ] ordinatam  $BA$  ve-



nisse in situm, quàm maximè intelligere possimus, eidem proximum, & jam congruere rectæ  $CV$ : ejus incrementum, aut decrementum  $VE$  erit differentia infinitè parva ordinatæ  $BA$ , similiterque arcus  $AV$  differentia erit infinitè parva curvæ  $DAV$ ; itidemque erit  $BC$  differentia infinitè parva axis  $DB$ , nec non areola  $ABCV$ ; duabus ordinatis infinitè proximis intercepta, dicitur dif-

ferentia infinitè parva areæ  $DAB$ ; manifestum enim est, posse concipi, ut tam prope accedant invicem ordinatæ  $BA, CV$ , ut ratio tam  $EV$  ad  $BA$ , quàm  $CB$  ad  $BD$ , nec non  $VA$  ad  $AD$ , & spatii  $ABCV$  ad  $ADB$ , minor evadat quavis proposita ratione assignabili; minuitur enim hoc continuo accessu ordinarum  $AB, CV$ , quolibet ex dictis quantitatibus  $EV, CB, VA, ABCV$  in infinitum, ac tandem penitus evanescit, ubi utraque ordinata perfectè congruit; quare priùs oportet, ut minor fiat qualibet finita sui generis magnitudine assignabili, ideoque ad datum consequens rationem subinde acquirat, in hoc continuo fluxu, minorem qualibet assignabili. Similiter rotata curva  $DAV$  circa axem  $DC$ , ostenderetur, rotundæ superficiæ per curvæ rotationem genitæ differentiam, ab arcu  $AV$  infinitè parvo procreatam, esse pariter infinitè parvam: nec non rotundæ solidi portionem, planis per  $BA, & CV$  infinitè proximis æquidistanter ductis interceptam, esse infinitè pariter exiguam, &c.

Cæ.

## Infinitorum &c. 25

Cæterùm hîc pariter observandum est, nec magnitudines has infinitè parvas concipi debere, velut determinatas, aut determinabiles quasdam portiones quantitatum, quæ certam, & definitam parvitatem obtrineant; quascumque enim portiunculas linearum, superficièrum, aut corporum ( itidemque virtutum, celeritatum, angulorum &c. ) acceperimus, aut designaverimus, hæ semper reipsa finitæ erunt, non infinitè parvæ: itaque non sunt intra certos terminos, quantumvis proximos, coactandæ, sed concipiendæ sunt ex una dumtaxat parte, ad summum, limitatæ ( ut CB fixum terminum habet in B, VA fixam originem habet in A, area BAVC adiacet fixæ lineæ AB, & corpusculum, ex illius conversione circa BC descriptum, adhæret fixo circulo radii BA ) ex altera verò parte fixum limitem non habentes, sed alteri extremo semper propius accedentem, ut continuo fluxu accedit punctum Cad B, & V ad A, & CV ad BA, intervallo utrisque interposito, infra quamlibet assignabilem magnitudinem, perpetuò decrescente. Aut etiam utrumque extremum sibi invicem accedere concipi potest, ut puncta E, V sibi semper propiora fiunt, neutro fixam positionem servante, dum lineolam EV infinitè parvam intercipiunt. Unde hæ magnitudines semper ut decrescentes, ac perpetuò diminuendæ accipi debent, ut suo, infra omnem assignabilem quantitatem, decremento, sub ratione infinitè parvarum, sive infiniteimarum partium intelligi possint.

### DEFINITIO V.

*Duarum quarumlibet magnitudinum, si prima ad secundam, habuerit rationem majorem qualibet assignabili, adeoque, convertendo, secunda ad primam sit in minori ratione, quàm qualibet assignabilis, dicitur prima infinita respectu secunda, sive infinites major illa: secunda verò infinitè parva respectu prima, aut infinites minor eadem.*

D

SCHO.

SCHOL. Hoc modo etiam finitæ magnitudines respectu quidem absolutè infinitarum erunt infinitè parvæ, at respectu earum, quæ sunt absolutè infinitè parvæ, erunt ipsæmet infinitæ; Quare patet, nomina hæc *Infiniti*, aut *Infinitè parvi*, relativa potius esse, quàm absoluta, licèt communi loquendi modo obsecundans, in *Defin. III. & IV.* absolutè acceperim hæc vocabula, quia tunc respectus saltem ad ordinarias finitas quantitates subintelligebatur; quemadmodum etiam *Magnum & Parvum* termini sunt semper relativi, sed quoties ad ordinariam, & magis communem alicujus generis mensuram referuntur, absolutè solent enunciari, magnus aut parvus homo, magnus aut parvus canis, magna vel parva domus, subintelligendo respectu hominis, canis, aut domus mediocritis, & magis usitatæ quantitatis.

#### DEFINITIO VI.

*Ejusdem inter se ordinis, aut gradus magnitudines sunt, eorum earum ratio est assignabilis: Cum verò hujus ad illam major, aut illius ad hanc minor est ratio, quàm qualibet assignabilis, tunc gradus, aut ordinis hæc superioris, illa inferioris dicitur respectu alterius.*

SCHOL. Hinc ex quantitibus Infinitè parvis, aut Infinitis, vel Finitis, primæ inferioris gradus sunt respectu cæterarum, secundæ sunt ordinis superioris ad reliquas, tertiæ superioris quidem gradus aut ordinis respectu priorum, at inferioris respectu secundarum: inter se autè ejusdem ordinis aut gradus esse constat finitas quaslibet magnitudines. An verò magnitudines omnes absolutè infinitè, vel infinitè parvæ semper ejusdem inter se ordinis censendæ sint, an potius diversi gradus in utroque hoc magnitudinum genere reperiri queant, id in præsentis disquisitione detegendum erit: Clarissimis viris *Newtono, Leibnitio, &*

*Bernonllio*, *Hospitalio*, *Hermanno*, ipsique etiam *Varignonio* sua constat diversitas ordinis in infinite exiguis, quippe fluxionum fluxiones, & differentiarum differentias secundas, tertias, quartas &c. in Geometriam inveniunt, ut ex ipsorum monumentis passim liquet; *Bernardus* autem *Nieuventytius* in sua *Analyfi Infinitorum*, non esse ultra primas differentias progrediendum, pluribus contendit, adedque infinite parvas magnitudines ad eundem semper ordinem spectare arbitratur. Iisdem supra laudatis egregiis Viris (præter *Varignonium* & *Nieuventytium*) placuisse, ut ordinis, & gradus diversitas etiam inter quantitates infinite magnas admitteretur, ex eorum modis, & loquendi formulis patet, ut ex celebri *Leibnitzii* dicto, *Algor. Lypſie pag. 86. Et infinite sunt gradus, tam infinitorum, quam infinitè parvorum*; Idque *VVallisii* præsertim exemplo laudatus est, qui omnium primus spatia *Plusquam infinita* in Hyperbolis altiorum graduum detexit: hæc enim nihil aliud sunt, ut videbimus, quàm infinite magnitudines superioris ordinis, quæ nimirum adhuc respectu quantitatum absolute jam infinitarum sunt infinite, sive illis infinites majores, quemadmodum differentie secundæ, vel tertiæ *Leibnitzii* sunt quantitates infinite parvæ ordinis inferioris, sive infinites minores ipsismet primis differentiis, quæ jam absolute erant infinite exiguæ. Et sanè, mirum est, *Cl. Varignonium* in monum. *Acad. Reg. anni 1706* hæc *VVallisii* spatia *plusquam infinita*, velut contradictionem involuentia, reicere, dum secundas, & tertias differentias, adedque partes ipsismet infinitefimis infinite minores [ quæ *plusquam infinite parva* dici possent ] tam frequenter admittit, ubi de viribus centralibus, de radiis osculi, aliisque similibus disserit. Enimverò, nonne ipsæ finite quantitates infinites continent primas differentias, & hæc rursus infinites continent secundas, secundæ autem tertiæ? ergo multitudo secundarum differentiarum in ipsamet finita magnitudine

est plusquam infinita, & tertiarum differentiarum multitudo in ipsis infinitesimis primi ordinis plusquam infinita est, infinities verò plusquam infinita in magnitudinibus finitis, ac multò magis in quantitativibus absolute infinitis: adèd ut quævis magnitudo si continet infinitas numero primas differentias, utique contineat plusquam infinitas differentias secundas, & in altiori adhuc infinitatis gradu contineat differentias tertias; & in multò altiori quartas, atque ita deinceps. Quidquid id est, non abs re fuerit, hypotheticè saltem, hoc vocabulum interim definire, ut certa, & distincta controversæ rei notio habeatur.

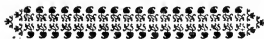
D E F I N I T I O VII.

*Si qua magnitudines infinities majores ostendantur aliis magnitudinibus jam absolute infinitis, adedque ordinis superioris ad ipsas probentur, illa PLUSQUAM INFINITÆ poterunt appellari.*

SCHOL. Hoc enim nomen, ipsis à VVallisio quondam inditum, alii deinceps Clarissimi Geometræ retinuerunt, ut Renatus Franciscus Slusius, David Gregorius, Joannes Craigius, & inter Gallos, quibuscum nunc instituitur disputatio, celeberrimus Marchio Hospitalius in *Tractatu Analytico Sectionum Conicarum lib. 5. prop. 14. coroll. 2. n. 3.*

Fateor tamen, quodlibet infinitum posse adhuc plusquam infinitum censerì, quia cum nullus sit minimus infiniti gradus, quolibet infinito proposito, semper aliud infinities minus reperiri potest, cujus respectu illud sit plusquam infinitum, ut constabit ex dicendis infra *prop. 10*, ubi ipsomet asymptotico spatio hyperbolæ Apollonianæ (cujus respectu VVallisius altiores hyperbolas plusquam infinitas censuit) aliam aream infinities minorem, licet adhuc absolute infinitam, invenimus, cujus respectu ipsamet ordinaria hyperbola spatium plusquam infinitum cum asymptoto contract.

PRO-



PROPOSITIO I.



Magnitudinum ejusdem ordinis  $A$ , &  $B$ , tam summa  $A \dagger B$ , quam differentia  $A - B$  (posito nempe, quod  $A$ , juxta aliquam assignabilem inaequalitatis rationem, determinatè sit major, quam  $B$ ) ejusdem pariter cum alterutra ipsarum est ordinis.

Erit enim, ex defn. 6,  $A$  ad  $B$  in aliqua ratione assignabili, puta  $m$  ad  $n$ : quare & componendo  $A \dagger B$  ad  $B$ , & dividendo  $A - B$  ad  $B$ , erit in ratione pariter assignabili,  $m \dagger n$ , vel  $m - n$  ad  $n$ , ideoque, ex eadem definitione, tam  $A \dagger B$ , quam  $A - B$  ejusdem cum  $B$ , vel  $A$ , est ordinis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM. Hinc finitum additum finito non facit infinitum: nec duæ, vel tres partes infinitè parvæ finitam magnitudinem aggregant: nec binæ, vel aliquot infinitæ quantitates ejusdem ordinis ullam magnitudinem plusquam infinitam supra talem ordinem efficiunt.

PROPOSITIO II.

Per quemlibet finitum numerum in quavis magnitudo  $A$  multiplicetur, aut dividatur, tam productum in  $A$ , quam quotiens  $\frac{A}{m}$ , intra eundem ordinem cum ipso  $A$  consistet.

Nam, ex præcedenti,  $A \dagger A \dagger A \dagger A$  &c. quoties libuerit, ejusdem semper cum ipso  $A$  est ordinis; atqui multiplicatio, ut patet, non est nisi quædam repetita ejusdem quantitatis additio, ergo productum  $mA$  ejusdem ordinis erit cum ipso  $A$ . Simili ratione  $\frac{A}{m}$ , multiplicatum per  $m$ , in-

tra

tra eundem ordinem remanebit, sed tunc evadit ipsum A, itaque  $\frac{A}{m}$  ejusdem est ordinis cum ipso A; quare &c.

COROLL. Hinc non potest juxta finitum numerum toties sumi quantitas infinite parva, ut finitam quantitatem aliquando efficiat: idem dic de finita respectu infinite, ac de qualibet infinita respectu plusquam infinite: idemque vicissim de divisione, ex qua numquam magnitudo ad inferiorem ordinem deprimitur, dictum esto.

P R O P O S I T I O III.

**S**I ratio magnitudinum A ad C major sit qualibet assignabili, non minor erit ratione 1 ad 0.

Esto siquidem minor, si fieri potest, puta eadem quæ 1 ad  $\frac{1}{m}$  majorem quàm 0 (intelligendo per  $m$  quemlibet numerum, quantumvis magnum, qui dividendo unitatem, efficiat fractionem  $\frac{1}{m}$  quantumlibet parvam) ergo quia est ut  $m$  ad 1, ita 1 ad  $\frac{1}{m}$ , erit ratio A ad C eadem quæ  $m$  ad 1, adeòque non major qualibet assignabili, contra hypothesein; ratio igitur A ad C non minor est ratione 1 ad 0. Quod erat &c.

COROLL. I. Quælibet magnitudo inferioris ordinis, collata magnitudini ordinis superioris, ut metum nihil, in omni rigore, æstimanda est; si enim illa ad istam compararetur, ut aliquid majus nihilo ad unum quiddam, hæc haberet ad illam rationem minorem quam 1 ad 0, cujus oppositum demonstravimus.

COROLL. II. Et ideo nulla inferioris ordinis magnitudo addita magnitudini ordinis superioris, vel ab eadem detracta, hanc auget, aut minuit, sed ejusdem quantita-



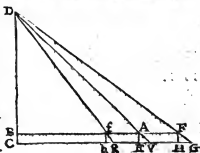
# Infinitorum &c. 31

titatis relinquit, ad ipsam enim comparatur, ut nihil ad aliquid, unde sicut 170, & 1-0 æquantur 1, ita finita, quantitas per infinitè parvæ additionem, aut subtractionem, non crescit aut minuitur, nec quantitas infinita per accessum, aut recessum finitæ quantitatis, nec etiam (si quæ sint) plusquam infinitæ magnitudines augentur, aut decurtantur per magnitudinem, absolutè quidem infinitam, sed ordinis inferioris; ac in universùm, magnitudines æquales censenda sunt, qua magnitudine dumtaxat infinitas minori differunt, ut in libello *Quadrat. Circ. & hyperb. ad Coroll. prop. 17.* dudum ostendi, & in Scholio ibidem adjuncto generatim admonui, ad hunc ipsum tractatum respiciens, quem vel ex tunc adumbraveram.

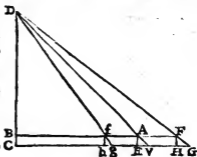
## PROPOSITIO IV.

**Q**uantitatum infinitè parvarum, quadam sunt ejusdem ordinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem habere possunt.

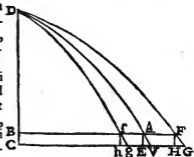
1. Sit primò triangulum  $DBA$ , in quo  $DB$  æquetur  $BA$ , & huic parallela ducatur  $CV$ , ipsique propius accedere, atque infinitè proxima fieri intelligatur: quomodo tam  $BC$  (sive  $AE$  illi æquidistans) quàm  $EV$ , infinitè parvæ evadent *ex defn. 4.* quippe ad finitas  $DB$ , aut  $BA$  rationem habere poterunt minorem qualibet assignabili: semper tamen, ob similia triangula  $DBA$ ,  $AEV$ , erit  $BC$ , sive  $AE$  æqualis  $EV$ , ut  $DB$  æqualis  $BA$  ponatur. Quod si jam  $DB$  ad  $BF$  supponeretur habere aliam quam-



quamlibet rationem, puta  $m$  ad  $n$ , juncta  $DFG$ , & ducta  $FH$  ipsi  $BC$  parallela, erit similiter infinite parva  $BC$ , vel  $FH$  ad infinite parvam  $HG$  in eadem ratione assignabili  $m$  ad  $n$ , quam habent ipsæ  $DB$ ,  $BF$ ; quare in magnitudinibus infinite parvis quælibet assignabilis ratio locum habere potest; Quod erat demonstrandum.



2. Sit jam secundò circa axem  $DB$  quælibet curva  $DAV$ , & alia huic analoga  $DFG$ , cujus nempe ordinatæ  $BF$ ,  $CG$  ad ordinatas prioris  $BA$ ,  $CV$  sint perpetuò in quavis constanti ratione assignabili  $m$  ad  $n$ . Si ergo, ut antea, fiant infinite proximæ  $BAF$ ,  $CVG$ , & ductæ sint axis parallelæ  $AE$ ,  $FH$ , constat, ipsas ordinarum differentias  $GH$ ,  $EV$  fieri infinite parvas; & tamen cum eadem sit ratio assignabilis  $m$  ad  $n$ , tum integræ  $CG$  ad integram  $CV$ , tum  $BF$ , sive  $CH$  ablatæ ad ablatam  $BA$  seu  $CE$ , erit & reliquæ  $GH$  ad reliquam  $VE$  assignabilis eadem ratio  $m$  ad  $n$ ; Quare &c.



3. Patet hinc tertio etiam trapezia figuræ primæ, seu quadrilinea figuræ secundæ,  $FBCG$ ,  $ABCV$ , [ quæ pariter fiunt infinite parva, pro majori accessu linearum  $BF$ ,  $CG$  ]

# Infinitorum &c. 33

CG) futura semper in eadem ratione assignabili  $m$  ad  $n$ , quam perpetuò observant, in pari altitudine, quilibet ipsorum ordinatæ GG, CV: ergo &c.

4. Quin etiam quartò, si eadem quadrilinea circa axem BC revolvi intelligantur, orientur hinc trunci conici, seu conoidales, infinitè parvi [ nam pro majori accessu planorum circularium, radiis BF, CG descriptorum, hi trunci assignabili quovis corpusculo minores evadent] & tamen semper in ratione assignabili, nempe duplicata ipsius  $m$  ad  $n$ , sive dicas, ut  $mm$  ad  $nn$ , esse ostendentur, ob circulos à quibuslibet ipsorum quadrilinearum ordinatis FB, AB, sive CG, CV, descriptos, eorundem radiorum quadratis proportionales: itaque & in hoc magnitudinum genere vera est Propositio.

## S C H O L I O N.

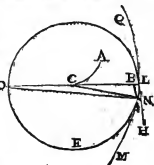
**H**inc patet eorum hallucinatio, qui magnitudines infinitè parvas pro minimis sui generis habent, illasque sive ut penitus indivisibiles, sive ut invicem aequales considerant. Non solent quidem summi Mathematici in hunc errorem cum vulgo impingere, nec desunt tamen exempla quadam, probantia id posse aliquando Viris etiam in hac arte, atque in hac ipsa methodo, versatissimis, per incogitantiam, excidere. Videat Cl. Varignonius (hujus regula certè non ignarus, quam & toties exactissimè observat) an non occasionem præbuerit, suspicandi, calculi perplexitati majorem, quàm legitimò infinitè parvorum usui, attentionem ab ipso impensam, quoties Vires Centrales examinans, aut Radios Evolutarum inquirens, angulum contingentia, utposè infinitè parvum, assumit velut aequalem angulo infinitè parvo, ad centrum osculantis circuli, à binis radiis infinitè proximis constituto, indeque triangula isocela considerat, eandemque laterum ad basim proportionem deducit. Vidiantur Monum. Academ. Reg. edit. Amstelædam. anni 1700 pag. 301: anni 1701 pag. 27;

E

31,

31, 34: anni 1703, pag. 252: anni 1706 pag. 245, 293, 647, 652, 656, atque ubi fortasse.

Nimirum posita Curva  $QLM$ , ejusque Evoluta  $AC$  (quam videlicet tangens prioris curva perpendicularares qualesbet  $LC, IC$ ) duabusque radiis infinitè proximis  $LC, IC$  ad centrū circuli  $LED$ , propositam curvam osculantis (eo quod sit maximus illi ad punctum  $L$  inscribibilis, eandemque cum ipsa  $QLM$  curvatura rationem obtineat, circa punctum  $L$  ipsi evoluta congruens, & cum illa longissime repens) atque intervallo  $Ll$  infinitè parvo, descripto arcu  $lN$ , occurrente tangenti  $LH$  in  $N$ , contendit Varignonius locis citatis, similia fore triangu-  
*fore triangu-  
 la  $LCl, lLn$ , unde deducit  $lN$  esse tertiam proportionalem post  $CL, Ll$ , parinde ac si anguli infinitè parvi  $lLn, LCl$  aequales forent, cum hic potius sit duplus illius; Nam extenso radio  $LC$  ad aliquam circumferentia partem in  $D$ , ac juncta  $Dl$ , est angulus  $LCl$  duplus ipsius  $lDl$  (20. 3. elem.) huic verò æquatur  $lLn$ , qui à tangente  $LH$ , & secante  $Ll$  [cum arcu  $Ll$  ad summum congruente] constituitur [22. ejusd.] adeoque  $LCl$  duplus est  $lLn$ ; quare dictorum triangularum similitudo, laterumque ad basim præterea proportionalitas, non subsistit; Imò ducta  $lB$  tangenti &  $lN$  parallela, ostendetur [coroll. 8. 6. elem.]  $Ll$  media proportionalis inter  $B L$ , seu  $lN$ , & diametrum  $LD$ , non inter illam, & radium; addunt formulę ex Varignonii calculo sic involuta procedentes, sunt dupla majores quàm vos exigeret. Atque hæc potius vera ergo censetur differentia inter formulæ Virivini centralium, anno 1701 adductas, à formulis anno 1706, 24. Aprilis, art. 11, 12, & 13 inventas, quam differentiam Auctor ipse pag. 238 animadvertens,*



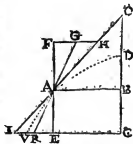
# Infinitorum &c. 35

rem frustra excusare nifus est, ex quo non tam magnitudinum æqualitas, quàm rationum similitudo in formalis illis exprimitur, qua etiam in duplicato, vel utcumque multiplicato ipsarum valore persistit: quod licet verum sit, genitimum tamen illius variationis formam non aperis, ex prænotata lege, tunc minus attente observata, pendens; unde licet in Varignonis casu nullus error denotationem Vis centralis sufficiat, eo quod perinde res se habeat, siue illa reciproca radii collegatur, siue reciproca diametri circuli osculatoris, cum istiusmodi radii sint, ut integra diametri, tamen, admissa hac arguenda ratione, posset in aliis casibus salis error obrepere, unde falsa quantitas conclusio deduceretur.

## PROPOSITIO V.

**Q**uadam etiam, ex quantitibus infinite parvis, diverfi sunt ordinis, atque aliq̄ aliis infinitis majores, aut minores, vâque sine ullo limite.

1. Sit primò curva DAV, cujus ordinatæ AB infinite proxima fieri concipiatur alia CV, & axi DB parallela EA extendatur ultra curvam in F ad aliquam datâ longitudinè AF, ducaturque FH ipsi AB parallela, occurrens in H rectæ OAI tangenti Curvâ propositam in A, & concurrenti cum CV in I; tum divisa FH ad punctum G in quavis ratione assignabili  $m$  ad  $n$ , jungatur GA, quæ producta omninò intra curvam cadet (aliàs & ipsa tangeret, quod est absurdum; nec enim duæ rectæ ad idem unius continuæ curvæ punctum illam tangerent, possunt) licet post aliquod determinabile intervallum, illam fortasse sit secatura, & idem ipsam CV, quæ ad in-

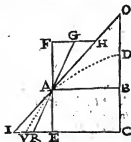


E 2

ter-

tervallum minus quolibet dato ipsi AB accedit, omnino secabit inter E & V, velut in R: eritque ratio EI ad IV major ratione ejusdem EI ad IR; sed hæc, ob similitudinem triangulorum, eadem est, ac FH ad HG, quæ potest esse quævis assignabilis  $m$  ad  $n$ , ergo EI ad IV, adeoque & dividendo EV ad VI, rationem habet majorem quâlibet assignabili, unde *ex defn. 5. & 6.* illa infinities major est, quàm ista, & ordinis, ad hanc superioris; Quod &c.

2. Rursus trilineum ipsùm VAI erit infinities minus trilineo EAV, vel EAI (ob basim VI infinitè minorem ipsa VE, vel EI) necnon ipsorum utrumque adhuc infinities minus est quadrilineo infinitè parvo ABCI, vel ABCV, aut ABCE [quæ lineæ EV, EI sũnt ipsa AB infinities minores] unde & hinc patet, varios ordines resultare infinitè parvorum.



3. Quin etiam si circa ordinatam BA omnes illæ areæ rotarentur, foret solidum à trilineo VAI infinitè minus solido à triangulo EAI, vel à trilineo EAV: hoc autem rursus infinitè minus solido à quadrilineis ABCI, ABCV, ABCE genito, nam quælibet superficies cylindricæ, ab VI, VE, EC productæ, fierent eodem ordine aliz aliis infinities minores; Quare constat propositum.

COROLL. I. Cum ostensa sit *num. 1.* recta VI minor infinities ipsa EV, hinc est quòd juxta *coroll. 2. prop. III.* potest EV considerari ut æqualis ipsi EI, à qua differt differentiâ infinitè minori.

COROLL. II. Unde amplius demonstratur methodus infinitè parvorum in ducenda cujusvis curvæ tangente; cum enim, ob similitudinem triangulorum, sit IE, sive illi, ex dictis, æqualis VE, ad AE, ut AB ad BO, ergo sub-

tan-

# Infinitorum &c. 37

Tangens BO est semper quarta proportionalis post differentiam infinite parvam ordinarum VE, & differentiam abscissarum AE seu BC: quare, si ordinata vocetur  $y$ , & abscissa  $x$ , adeoque differentiarum earundem sint  $dy$ ,  $dx$ , erit semper subtangens  $BO = \frac{ydx}{dy}$ . Et ex curvæ natura,

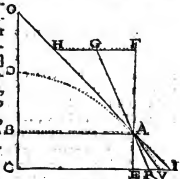
data, cum innotescat ratio  $dy$  ad  $dx$  (ut mox in subiuncto Scholio docebimus) etiam nota fiet ratio BA ad BO, & expeditissime tangens OA determinabitur: ita ut à suismet principiis mysteria calculi differentialis hoc modo geometricè demonstrata habeantur.

COROLL. III. Hinc pariter colligitur, ipsamet quadrilinea ABCI, ABCV, ABCE [nec non & solida, quæ ab ipsis circa axem positione datum rotatis gignerentur] utpotè infinite parvis differentiis discrepantia, posse pro æqualibus ritè computari, *juxta idem coroll. 2. prop. III.* cui fundamento nititur calculus integralis; ex ejus enim præscripto, summa ex rectangulis ordinarum BA in quolibet sibi correspondentes differentias infinite parvas axis BC, æquatur ipsimet areæ curvilinæ CDAV: nec non summa cylindrorum, quorum bases sint circuli ab ordinatis descripti, & altitudines sint eadem infinite parvæ differentiarum axis, æquatur rotundo solido, ab ipsa figuræ curvilinæ generato: quippe differentia omnis, per indefinitam axis sectionem, multiplicato eorum rectangulorum, aut cylindrorum numero, & diminuta in infinitum quantitate singulorum, fit infinite exigua, adedque evanescit.

COROLL. IV. Sed et hinc constat, ipsummet arcum AV infinite parvum, tam rectæ linæ AV sibi subtensæ, quam tangentis portioni AI æqualem esse: si enim AG tam propè accedere concipiatur ad rectam AH, ut punctis G, H sibi in vicem fermè congruentibus, utriusque ipsarum AG, AH differentia minor fiat quavis assignabili magnitudine, idè evadat infinite parva, tunc *ex 2. coroll.*

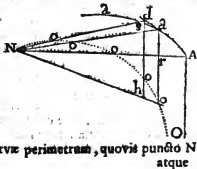
*prop.*

prop. III. fiet altera alteri æqualis; quare et AR æqualis evadet ipsi AI tangenti, multoque magis curva AV utriusque interpolata [quæ mediæ inter utramque longitudinis est, itaut quamdiu finita fuerit, major quidem ostendatur subtenfa recta AV, adeoque & AR, quæ perpendicularo est propior, at minor tangente AI, obtusum angulum AVI subtendente.] hæc æqualis tum ipsi tangenti AI, tum suæ subtenfæ AV, & promiscuè una ex his pro alia tutò usurpari poterit, quoties de infinitè parvis sermo fuerit: imò ipsamet curvæ particula AV infinitè æquiva, tamquam recta confide-



rari poterit, citra ullum erroris periculum [nam error dum sit infinitè parvus, tandem evanescit, ac nullus evadit] quod significant recentiores Geometriæ, dum curvas omnes sub ratione cujusdam polygoni infinitorum laterum spectare nos docent, & curvarum tangentem quamvis pro unitis, ex ejusmodi lateribus infinitè parvis, production æstimandam præscribunt.

COROLL. V. Eodem jure areas curvilineas quandoque licebit in triangula rectilinea infinitè parva resolvere, ad ipsarum dimensionem venandam; veluti si proponatur curva Aaa, electo ubilibet, si-



ve intra, si ve extra curvæ perimetram, quovis puncto N, atque



# Infinitorum &c. 39

atque inde ad singula curvæ puncta ductis ramis infinitè proximis  $N_1, N_2$ , poterit sector  $N_1a$  pro triangulo rectilineo censeri, quia *ex coroll. paged.* arcus  $as$  infinitè parvus pro recta assumi potest: & quoniam, extensa  $N_1$  ad tangentem in  $d$ , portio  $sd$  aduc infinities minor evadit recta  $N_1$ , adeoque triangulum  $as d$  est quantitas infinitè parva secundi ordinis, quippe infinities minus triangulo  $N_1a$  jam infinitè exiguo, poterit indiscriminatim etiam  $N_1ad$  sumi pro ipso  $N_1as$ , & alterutrum ipsorum considerari velut elementum areæ  $NAa$ , itaut ejusmodi triangulorum summa det mensuram integram talis areæ; Et si talia alia curva  $QoN$  exhibeatur, cujus rami  $No$  sint perpetuè paralleli ad correspondentem prioris curvæ tangentem  $ad$ , constat fore aream utriusque curvæ interpositam  $ooOAA_1$  duplam semper sectoris correspondentis  $AarN$ , propter singula parallelogramma  $daob$  (quæ non differunt ab areolis infinitè exiguis  $oas$ , nisi per trilinea infinities adhuc minora  $oda, dsa$ , ob bases  $ob, ds$  infinities minores ipsis  $ao, sb$ , & idem æqualia invicem censeri debent *ex coroll. 2 prop. III. sæpe citato*) dupla triangulorum  $A d N$  in eadem basi  $ad$ , iisdemque parallelis  $da, No$  existentium, ut *cap. 8. Hugeniorum* demonstravimus.

Obiter autem animadvertere placet, hujus methodi fundamentum, etsi novum videatur, nec absque scrupulo à plerisque admitti consueverit, nimirum: *magnitudines, quarum differentia minor evadit qualibet assignabili differentia, seu quæ differre possunt quantitate æquiva infinities minori, pro æqualibus rectè usurvari*: vetustissimum re ipsa esse, ac Veterum methodo, quæ per inscriptiones, & circumscriptiones, longiori circuitu, figurarum æqualitatem, vel aliam proportionem venabatur, necessariò fuisse præsuppositum; Vis enim demonstrationum ejusmodi apud Euclidem, & Archimedes in eo certè consistit, quòd, nisi veræ forent ipsorum propositiones, assignari posset differentia figurarum, nem-

nempe excessus, aut defectus ab asserta mensura: facta. autem tali assignatione, cum per inscriptionem, & circumscriptionem ostendantur alię figurę minus excedere, aut deficere à figuris propositis, quàm pro differentia assignata, & tamen assertam mensurę rationem constanter observare, concluditur ab absurdo, differentiam ab adversario assignatam nullam esse, utpotè minorem qualibet assignabili: atqui hoc ipsum, majori compendio, & nos dicimus, dum magnitudines, differentia infinites minori discrepantes, pro æqualibus habemus: si non sunt habendę pro æqualibus, assignabilis erit eorum differentia; assignetur ergo: non igitur ipsarum differentia minor evadet qualibet assignabili, quod est contra hypothese[m]; falsum est ergo, non esse habendas pro æqualibus: Quod est propositum.

## S C H O L I O N.

**I** Nvestigatio autem rationis differentia ordinarum ad differentias abscissarum in qualibet Curva, unde tangentium methodum superius, cotoll. 2. huius prop. pendere diximus, sic procedit. Quantitates determinata, & ejusdem semper mensura, primis alphabeti litteris a, b, c, e &c. denotentur: indeterminata verò, qua subinde crescunt, aut decrescunt, per postremas x, y, z, u &c. de more exprimantur, ut habeatur æquatio curva propria: sic in parabolis, si latus rectum vocetur a, & abscissa x, ordinata verò y, patet, æquationem curvę propriam fore  $yy = ax$ , propter ordinata quadratum semper æquale re-ctangulo abscissa in latus rectum: atque ita in aliis magis compositis. Tum supponatur abscissa, verbigratia x, angere portione sui infinite parva dx (sic enim illam exprimere docuit Leibnitzius, ut differentiam affinis y vocat dy, & affinis z appellat dz, atque ita in aliis) adeo ut evadat abscissa x+dx; & cum illi correspondere deprehendatur y+dy, vel y-dy pro ordinata (prou: videlicet applicata crescunt, aut decrescunt ad

succe-

# Infinitorum &c. 41

incrementum abscissa) itaque in aequatione, qua curva naturam determinat, si loco  $x$ , &  $y$ , ac productorum ex ipsis, rui potestatum eandem, subrogetur  $x \dagger dx$ , &  $y \dagger dy$ , eorumque producta, aut potestates; ac mox termini comparentur, quos differentia  $dx$ , &  $dy$  ingrediuntur, abiculis tum terminis, quibus differentia non afficiunt [ utpote in rui prioris aequationis, ab initio proposita, jam aequalibus ] tum terminis, quos ingreditur productum ex pluribus differentiis  $dx$ ,  $dy$ , sive ad invicem, sive per se ipsas multiplicatis ( utpote infinites minoribus, & per 1. coroll. prop. 11. aequalitati reliquorum terminorum nihil derogantibus, si abiciantur ) habebitur aequatio differentialis, ex qua ratio differentia ordinarum ad differentias abscissarum, nempe eandem  $dy$ , &  $dx$ , innotescet. Itaque in aequatione parabola superius proposita, ubi  $yy = ax$ , habebitur etiam  $yy \dagger 2ydy \dagger dydy = ax \dagger adx$ ; sed jam  $yy = ax$ , ergo residua pariter aquantur, scilicet  $2ydy \dagger dydy = adx$ : abiciatur  $dydy$ , quod infinites minus est ipso  $2ydy$  [ nam ad illud est in ratione infinitae parva quantitatis  $dy$  ad finitam  $2y$  ] manebit adhuc  $2ydy = adx$ ; adeoque ut  $a$  ad  $2y$ , sive ut  $y$  ad  $2x$ , ita  $dy$  ad  $dx$ , & ita consequenter ex supradictis coroll. 2. hujus propositionis, ordinata  $y$  ad subtangentem, qua idem dupla invenietur abscissa  $x$ , utpote  $= 2x$ .

Aliud exemplum esto in curva, cujus natura desinitur aequatione  $yy = aa \dagger xx$  ( qua esset hyperbola aequaliterna ad secundam diametrum relata ) ergo si  $y$  evadat  $y \dagger dy$ , &  $x$  fiat  $x \dagger dx$ , habebitur  $yy \dagger 2ydy \dagger dydy = aa \dagger xx \dagger 2xdx \dagger dx dx$ : auferantur tum  $yy = aa \dagger xx$ , tum termini infinites minores reliquos  $dydy$ , ac  $dx dx$ ; eritque  $2ydy = 2xdx$ , adeoque  $dy$  ad  $dx$  erit, ut  $x$  ad  $y$ , unde ut abscissa  $x$  ad ordinatam  $y$ , ita erit ipsa eadem ordinata  $y$  ad subtangentem quaesitam, qua erit tertia proportionalis abscissa, & ordinata.

Expeditius autem sumitur differentia cujusvis aequationis propositae, si in illa ubique termini ab indeterminatis affecti multiplicentur per numerum dimensionis eandem indeterminatarum,

& una illarum dimensio in suam differentialem commutetur, loco  $x$ , &  $y$  scribendo  $dx$ , &  $dy$ . Ita cum si  $yy = ax$ , etiam  $2ydy = adx$ ; si  $x^3y = a^4 \dagger xxyy$ , etiam  $3yxxdx + x^3dy = 2xxydy + 2yyxdx$ , adeoque per antitesin,  $3yxxdx - 2yyxdx = 2xxydy - x^3dy$ : & sic est  $dy$  ad  $dx$ , ut  $3yxx - 2yyx$  ad  $2xxy - x^3$ . Id quod valet in quibusvis, tam perfectis, quam imperfectis indeterminatarum potestibus: aded ut generatim differentia ipsius  $x^m$  sit  $mx^{m-1}dx$ , quemcumque numerum integrum, aut fractum, positivum, vel negativum denotes exponentis  $m$ .

Atque hinc viceversa integratio cujusvis differentialis, seu reverso ad quantitatem, cujus proposita fuerit differentia, habetur, augendo unitate dimensionum indeterminatarum  $x$ , vel  $y$ , & per eandem dimensionem sic auxilium, totam productionem dividendo, ut ipsius  $x^m dx$  summa erit  $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ . Unde eliciuntur innumeri spatiorum superficialium, & solidorum dimensiones: dummodo advertatur, inventę summe persape addendam, aut subtrahendam, prout res tulerit, quantitatem aliquam constantem, seu quod eadem differentia sit duarum quantitatum, siue illis communi jungas, siue demas datam aliquam magnitudinem; Quando autem hec addi, vel detrabi debeat, inveniet, observando, an ubi evanescit quantitas, de cujus dimensione per integrationem obtinenda agitur, pariter evanescat integralis inventa, an quidam constans inter ejus terminos adhuc supersit, hoc ipsum etiam sub signo contrario erit inventa integrali apponendum; at verus valor summe quasita habeatur.

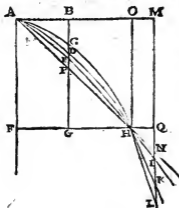
## PROPOSITIO VI.

**Q**uod precedens docuit, aliter per infinitas parabolæ demonstrare.

1. Intra quadratum  $AHQ$ , cujus diameter  $AH$ , descriptæ sint, eodem latere recto  $AQ$ , infinitæ parabolæ variorum graduum, nempe  $AHQ$  quadratica, siue Apollonia-

# Infinitorum &c. 43

niana, ADH cubica, ACH biquadratica, &c. adeo ut ducta ubivis recta BCDEPG axi parallela, secante has curvas, & rectam AH, ut in figura, sit semper HO ad



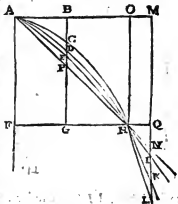
BP in eadem ratione ipsarum OA, AB, sed HO ad BE in earundem ratione duplicata, & ad BD in triplicata, ad BC autem in quadruplicata, atque ita deinceps. Patet ergo, rectas HO, seu GB, & reliquas ejus interceptas BP, BE, BD, BC &c. fore semper continuè proportionales; quare si tam proxima fieri concipiatur BG axi AF, ut intercepta BP evadat infinitè parva, cum sit ratio G B ad B P eadem

rationi BP ad BE, & hujus ad BD, & hujus rursus ad BC, prima autem ratio sit major qualibet assignabili *ex def. 4. & convertendo*, etiam reliquæ majores erunt quolibet assignabili, & idèd quantitatum PB, BE, BD, BC, quolibet respectu antecedentis erit, *per def. 5. & 6.* infinitè parva, atque inferioris ad ipsam ordinis: quare inter magnitudines absolute infinitè parvas datur hæc diversitas ordinis: quod erat &c.

2. Angulus contingentis BAE est infinities minor angulo rectilineo BAP, & angulus BAD rursus infinities minor est angulo BAE, angulus autem BAC infinities adhuc minor est angulo BAD, atque ita porro in infinitum, ob subtensas PB, EB, DB, CB, eadem ratione majori quavis assignabili in infinitum decrecentes; datur ergo & in angulis infinitè parvis hæc ordinis diversitas: quod erat demonstrandum. F 2 3. Area

3. Area ipsa rectanguli infinite parvi  $ABGF$  infinite major est triangulo  $ABP$ ; & hoc infinite majus trilineo  $ABE$ , quod ipsum infinite majus est trilineo  $ABD$ , & hoc infinite adhuc majus trilineo  $ABC$ , atque ita deinceps, ob bases continue proportionales, & ratione majori quolibet data decrecentes; unde patet in superficiebus infinite parvis hæc diversitas ordinis.

4. Quod si eadem areæ vertantur circa  $AB$ , ut à rectangulo  $ABGF$  cylindrus, à triangulo  $ABP$  conus, à reliquis trilineis fusi conoidales generentur, constat, ex solidis ita generitis, alia aliis infinites minora; ob similem rationem, proditura; quare et in corporibus infinite parvis variorum ordinum diversitas locum habet; quod erat &c.



COROLL. Ex dictis supra num. 2. habetur, quod sicuti nulla recta linea primam angulum contingentie  $BAE$  dividere potest, ut ostendit Euclides *lib. 3. prop. 16.* sed tantum arcus circuli, vel parabolæ, aut alterius lineæ æquicurvæ; ita postmodum angulum  $BAD$  nullus arcus circuli, vel parabolæ quadraticæ dividere potest, sed tantum arcus parabolæ cubicæ sibi similis, vel altioris ordinis; angulum verò  $BAC$  nec ipsa quidem parabola cubica dividet, atque ita de aliis in infinitum: *neque vocit natura limitem*; ut ait doctiss. Eques Isaac Newton *Princip. Math. Philos. Nat. lib. 1. Sect. 1. Schol. post lemm. 11.* ubi et notat, binis quibuslibet ejusmodi angulis alios rursus inferi posse

# Infinitorum &c. 45

medii, inter utrumque, ordinis, idest infinities minores  
uno extremorum, & infinities majores alio.

## S C H O L I O N.

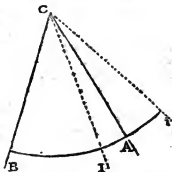
**E**X hoc vario infinitè parvorum ordine, innotuit Philosophis, Gravitate[m] esse vim infinitè parvam respectu Virtutis cuiuslibet actu movens corpus quoddam velocitate nota mensura; si enim hac Virtus proiciat mobile per directionem AO, ita ut tempore t ferri possit ab A ad O, utique dicti temporis particula infinitè parva et illud promovet per portionem spatii infinitè parvam AB; sed interim Gravitatis illud deprimet usque ad parabolam AEH, nimirum per particulam BE infinitè minorem ipsa BF, sive ipsa AB; quare Vis Gravitatis infinities minor censenda erit Virtute dicti proicientis mobile per AO, siquidem illi respondet effectus infinities minor, quàm huic, dum utraque tempore infinitè parvo, ut aequaliter operans, concipi debet, nam augmenta velocitatis, qua tempore infinitè parvo et sibi superaddit Gravitatis supra illum infinitè exiguum velocitatis gradum, quo incipit deprimere mobile, utpotè infinities infinitè minora, velut nihil consideranda sunt, donec per tempus finita, et nota mensura satis adoleverint, ut jam debeant computari. Idem sequetur in Viribus (siqua sint alicubi) aliorum generum infinities minoribus: nempe si talis species Gravitatis, aut Vis centripeta concipiatur, qua corpora acceleret in duplicata ratione temporis, hac composita cum eadem Virtute projectiva, in temporis differentia infinitè parva et deprimet mobile per BD usque ad parabolam cubicam, dum Vis gravitatis depressisset per BE usque ad parabolam quadraticam; ideoque Vis centripeta dicti generis foret adhuc infinities minor Vs gravitatis, propter motum BD infinities minorem ipso BE. Similiter si Vis centripeta ejus rationis fingeretur, qua acceleraret mobile in triplicata temporis ratione, constat, quòd hac, momentaneo tempore et, non nisi per BC ad parabolam quadratoquadraticam deprimeret mobile, unde

unde adhuc infinitis minor procedenti probaretur. Verùm hæc de infinitè parvis sufficit breviter attigisse: ad infinitè magna-  
gradum facere convenit, de quibus eadem fermè demonstrabimus,  
ut nostrum propositum Spatorum Plusquam infinitorum conclu-  
dere liceat.

## PROPOSITIO VII.

**Q**uantitas absolutè Infinitarum quadam ejusdem sunt or-  
dinis, & quamlibet inter se rationem assignabilem  
habere possunt.

1. Sit enim primò angu-  
lare spatium  $BCA$ , lincis  
 $CB$ ,  $CA$  æquè in infinitum  
productis, per modum in-  
finitè longi sectoris, inter-  
iectum, fiat autem angu-  
lus  $BCI$  ad ipsum  $BCA$   
in quavis ratione assignabi-  
li  $m$  ad  $n$ : patet, infinitum  
quoque spatii interceptum  
rectis  $CB$ ,  $CI$  æquè in in-  
finitum protractis cum ipsa  
 $CA$ , futurum in eadem ra-  
tione assignabili  $m$  ad  $n$  ad angulare spatium prius datum  
 $BCA$ : ideoque hæc absolutè infinita spatia ejusdem inter  
se ordinis erunt, & quamlibet inter se rationem habere  
poterunt.



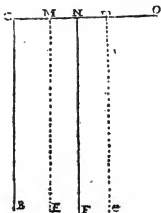
2. Sit rursus (in figura sequenti) parallelogrammum in-  
finitè longum  $BCNF$  super finita basi  $CN$ , & fiat  $CM$   
ad  $CN$  in qualibet ratione assignabili  $m$  ad  $n$ , ducatur-  
que ipsæ  $CB$ ,  $NF$  parallela  $ME$ , eritque infinitè lon-  
gum parallelogrammum basi  $CM$ , lincis  $CB$ ,  $ME$  (æque  
infinitè productis cum ipsa  $NF$ ) interiectum, ad prius pa-  
pa-



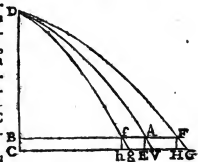
# Infinitorum &c. 47

parallelogrammum BCNF in eadem assignabili ratione  $m$  ad  $n$ , hoc est suarum met basium CM ad CN: quod erat &c.

3. Infiniti cylindri ex conversione parallelogrammorum BCME, BCNF circa CB, erunt utique in ratione basium, quæ duplicata est ipsarum CM, CN, adeoque in ratione assignabili  $mm$  ad  $nn$ , quare etiam in figuris solidis vera est propositio: quod oportuerat demonstrare.



4. In qualibet ex iis figuris, quæ in infinitum ampliantur, ut parabole, aut hyperbole DAV, circa axem DC, fiat alia figura DFG priori analogæ, cujus nempe ordinatæ FB, GC ad ordinatas prioris AB, VC sint semper in eadem ratione quæpiam assignabili  $m$  ad  $n$ : patet, quod si utraque cum axe suo

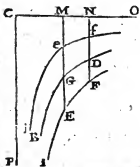


in infinitum producatur, erit area infinita CDFG ad infinitam aream CDAV in ratione ordinarum  $m$  ad  $n$ , quæ est ratio assignabilis; ergo idem quod prius.

5. Sed et solida ab his genita circa axem infinitum DC erunt in ratione suarum sectionum circularium, sive ut qua-

quadrata ordinarum, & idem in ratione assignabili  $m$  ad  $n$  unde in his pariter infinitis corporibus obtinet propositio.

6. Inter asymptotos MC, CP posita Hyperbola Apolloniana DGB, fiat alia huic analogae FEI cujus ordinatae FN, EM ad ordinatas prioris DN, GM sint in quavis assignabili ratione  $m$  ad  $n$ , patet infinita utraque spatia NFEIC, NDGBC (ut in Hugenianis cap. 8. n. 11. & in Quadratura Circuli prop. 17. ostendi, atque infra *Epist. ad D. A. L. A. lemm. 12.* demonstrabitur) fore



ad invicem in eademmet ratione assignabili ordinarum  $m$  ad  $n$ ; quod eandem veritatem confirmat.

7. Imò et quia semper ordinata quævis ME, quantumvis ipsi CP asymptoto proxima, est ad ordinatam MG, ut  $m$  ad  $n$ , quidni dicamus, & ipsam asymptoton CI hyperbolæ FE ad asymptoton CB alterius hyperbolæ pariter eandem rationem cæterarum ordinarum  $m$  ad  $n$  habituram? Ergo et in longitudinibus absolutè infinitis locum habere potest quævis assignabilis ratio: quod fuerat demonstrandum.

8. Denique et rotunda solida ab hisce spatiis asymptoticis circa CN conversis genita sunt molis absolutè infinitæ ( potest enim ex utrovis refecari versùs basim cylindrus æqualis cuilibet dato *ex coroll. 18. Torricell. de Solido Hyperbolico* ), & tamen assignabilem inter se rationem observant  $m$  ad  $n$ , quæ est quadratorum, seu circulorum, qui ab ordinatis genitricum hyperbolarum, ea rotatione, sunt: itaque infinitæ magnitudines cujuslibet assignabilis rationis sunt capaces: quod &c.

CO.

# Infinitorum &c. 49

**COROLL.** Patet ex dictis n. 7. infinitas asymptotos hyperbolarum non semper æquales censendas esse, cum imò sint ad invicem, ut quæ in pari altitudine ad alteram asymptoton utriusque hyperbolæ ordinantur, sive ut inscripta ipsarum parallelogramma, vel etiam ut earundem hyperbolarum figuræ, quæ à recto, & transverso ipsarum axe continentur: quemadmodum: & ipsa hyperbolica spatia sunt in eadem ratione distantium figurarum, quæ sub axibus continentur; qua in re, ut in plerisque aliis proprietatibus, convenire hyperbolas cum ellipsis, quæ pariter sunt, ut axium figuræ, notissimum est Geometris.

## PROPOSITIO VIII.

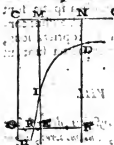
**Q**uadams verò, ex quantitatibus absolute infinitis, diversi sunt ordines, atque alia alios infinitos majores, aut minores, adque sine ullo limite.

1. Si primò Spatium angulare BCO, lateribus CB, CO indefinite productis interjectum: patet, hoc infinitus majus fore quovis parallelogrammo infinite distaxat longitudinis CB, sed finite latitudinis CM, aut CN, videlicet ipso BCME, aut BCNF, nam in pari omnium longitudine infinita CB, sunt ad invicem, ut latitudines CO, CM, CN, quarum prima ad utramlibet posteriorum habet rationem majorè qualibet assignabili.



# De Infinitis.

2. Sic deinde Spatium  $CNDIPB$ , hyperbola Apollonia  $DIP$  [ aliove curva asymptotica, quæ cum asymptoto infinitum spatium contineat, cujusmodi est Conchoidis Nicomæda, & aliae altioris gradus Hyperbolæ, qua parte ordinatarum potestates majores sunt potestatibus abscissarum ] cum sua asymptoto  $CB$  infinite producta comprehensum; & fiat, ut  $m$  ad  $n$ , ita  $NC$  ad  $CM$ , tum agatur  $ME$  asymptoto parallela, quæ ipsi curvæ  $DIP$  alicubi occurrer, velut in  $I$  [ eo quod curva semper fiat propior asymptoto, & ad intervallum  $GP$  perveniat minus quolibet dato intervallo,  $CM$  vel  $GE$  ] atque ulterius protensa, spatium  $PIE$  absolute infinitum (cujus nampe ordinatæ  $PE$  perpetuo decrescunt, dum longitudinibus  $IE$  in infinitum



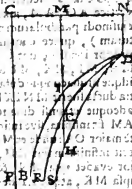
nitum minori applicantur, decrescentibus è contrario ordinatis asymptotici spatii  $GP$  comprehensæ; unde si quadrilineo  $IMDN$  finito, & limite  $PIE$  infinito, commune addatur spatium  $CMIPB$ , fiet area  $CNDIE$  absolute minor parallelogrammo infinite longo  $BGM$ ; quare major erit ratio parallelogrammi infiniti  $BCNF$  ad infinitum spatium asymptoticum  $CNDIE$ , quam ad infinitum parallelogrammum  $BGM$ . Et est autem ad hoc in ratione basium  $CN$ ,  $GM$ , hoc est  $m$  ad  $n$ , ergo  $BCNF$  ad  $CNDIE$  rationem habet majorem quolibet assignabili  $m$  ad  $n$ , & ideo est infinites majoris modum. Quod dicitur.

3. Quod si hæc omnia spatia supra  $CNO$  convertantur, manifestum est, solidum ab angulo  $C$  in spatio  $BOO$  infinites majus fore cylindro à parallelogrammo  $BCNF$ , & hoc rursus infinites majus solido infuso, quod  $CNDIE$  produceret: quare et in corporibus infinitis diversis infinitorum ordines observantur.

4. Jam

# Infinitorum &c. 51

4. Jam, verò si per punctum  $D$ , inter asymptotas  $CN$ ,  $CB$  transeat infinitæ hyperbolæ, nimirum linearis, sive Apolloniana  $DIB$ , quadratica  $DER$ , cubica  $DHS$  &c. ita ut rationi  $NC$  ad  $CM$  æqualis sit ratio  $MI$  ad  $ND$ , ejusdem verò duplicata sit ratio  $ME$  ad  $ND$ , & triplicata ratio  $MH$  ad  $ND$ , & sic deinceps, pater fore in continua ratione ipsas  $ND, MI, ME, MH$  &c. ideoque etiam si punctum  $M$  cum linea  $MI$   $EH$  per ipsum transeunte, continuè accedat, ac tandem congruat puncto  $C$ , & asymptoto  $CBRS$ , erunt in continua ratione  $ND$  ad infinitam  $CB$ , ut  $CB$  ad infinitam  $CR$ , atque ut hæc ipsa ad infinitam  $CS$ , unde variæ ordinis infinitarum longitudi-

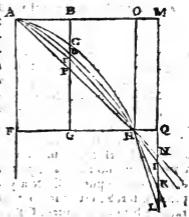


num nascentur, quarum alix aliis sunt infinites majores.

5. Idem ex infinitis Parabolis  $AEH, ADH, ACH$  [de quibus *prop. 6.* egimus] ultra nodum  $H$  cum recta  $AH$  (quæ diameter est quadrati illis circumscripti) productis, ostendi potest; ducta enim ipsi  $H$   $O$  parallela  $ML$ , omnes secante in  $N, I, K, L$  &c. ut in figura, erit ratio  $AO, AM$ , &ve  $OH, MN$ , duplicata ratio  $OH, MI$ , triplicata vero  $OH, MK$ , quadruplicata autem  $OH, ML$ , ac



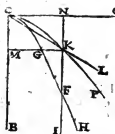
que ita deinceps (eo quod præfatæ axi parallelæ sint ex ordine, ut quadrata, cubi, biquadrata, altiorefque potestates abscissarum à vertice  $AO$ ,  $AM$ , juxta ejusmodi parabolarum naturam), quare continuè proportionales erunt  $OH$ ,  $MN$ ,  $MI$ ,  $MK$ ,  $ML$  &c. idque in quacunque distantia ducta fuerit  $MNIKL$ , adeoque etiam si distantia  $AM$  sit infinita, siue infinitè major  $OA$ : undè et  $MN$



erit infinitè major  $OH$ , & sic  $MI$  pariter infinitè major evadet ipsa  $MN$ , &  $MK$  infinitè major  $MI$ , &  $ML$  ipsa  $MK$ , atque ita deinceps sine limite: imò & sumptis, inter binas quaslibet dictarum continuè proportionalium, sibi immediatas, mediis proportionalibus, aliis intermedic parabolæ orrentur, diversique ordines mediis infinitorum prodirent, inter superius recensitos.

6. Sic ostendi potest, inter spatium infinitum angulare, & infinitè longum parallelogrammum finitè latitudinis, mediare spatium parabolicum circa suam axem consideratum (uti & spatium ab alia qualibet curva comprehensum, quæ circa axem ita se in infinitum suis ordinatis expandat, ut ejus tamen tangentes quemlibet angulum cum axe contingere possint) fiat enim (in figura sequenti) angulus  $BCO$  ad angulum  $BCL$  in quavis ratione assignabili  $n$  ad  $1$ : patet, quod ipsa  $CO$  tangente parabolam  $CK$  circa axem  $CB$  descriptam, ejus curvæ alicubi occurrat  $GL$ ; velut in  $K$  [ 27. 1. *Conic.* ] & ulterius protensa continet; cum curva parabolica  $PK$  infinitè producta spatium infinitum (quip-

# Infinitorum &c. 53



pe cujus latitudo semper augetur) PKL; & idem spatium angulare BCL, quod à parabolico BCP deficit quidem segmento CK finito, sed illud excedit infinito spatium LKP, erit utique majus eodem parabolico spatio, unde angulare spatium BCO ad illud parabolicum majorem habebit rationem, quàm ad aliud angulare BCL, idest, ex constructione, majorem habebit rationem ad illud, quàm sit quæ-

vis assignabilis ratio  $m$  ad  $n$ , quare erit illo infinito majus. At, quia recta NKL axi parallela, nedum secat parabolam CKP in K, sed et aliam quamlibet, quæ circa eundem axem describeretur, sectis singulis ordinatis KM prioris ad punctum G in data ratione  $m$  ad  $n$ , qualis esset CGH, secaret eadem axi parallela alicubi in puncto F (26. 1. Conic.) eidem non amplius occurrens, unde spatium infinitum resultabit IFH, finitum verò CFN, atque utrisvis addito eodem BCGFI, erit majus parabolicum spatium BCFH parallelogrammo infinito BCNI, & idem parabolicum aliud spatium BCKP majorem habebit rationem ad parallelogrammum BCNI, quàm ad parabolicam aream BCFH, ad quam tamen rationem habet ordinarum, scilicet  $m$  ad  $n$ ; unde primum parabolicum spatium superat infinitum illud parallelogrammum, ultra omnem assignabilem rationem; scilicet est illo infinito majus, eum esset [ex ostensio] angulari spatium BCO infinito minus; dantur ergo diversi infinitorum ordines, ita ut quædam sint alii infinites majores, aut minores; quod &c.

COROLL. I. Hinc habetur, infinitum Parabolicum Trilineum QCKP, quod ab angulari spatium BCO differt parabolico spatium BCP, ex dictis nam. 6. infinito minus; infinitum, angulari spatium BCO æquale censeri posse [ex coroll.

rol. 2. prop. III.] dummodo æquè in infinitum utraque  
CO, CB protracta intelligatur [ad modum sectoris OCH]

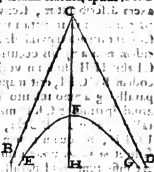
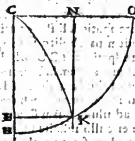
si cum recta NK, quantumvis  
distante, axi parallela definire-  
tur trilineum Parabolicum, jam  
eiusdem ordinis esset cum para-  
bolica area BCP (nempe illius  
subduplum) non verò illa infini-  
tius majus; sed tunc longitudo  
CB foret infinitus major latitu-  
dine GN trilinei, quippe ad hanc  
esset, in ratione ipsius CN, que  
infinita supponitur, ad latus re-  
ctum propositæ parabolæ, ex generali natura ipsius.

COROLL. II. Omnis hyper-  
bola EFG circa axem FH an-  
delinè producta, spatium con-  
tinet infinitum eiusdem ordinis  
cum spatio angulari à sua asym-  
ptotis BG, GD contento, amò  
illi penitus æquale, differentia  
enim asymptoticorum spatio-  
rum BCFE, DCFG infinitè  
minor est (ex num. 1.) ipso angu-  
lari spatio, imò tot gradi-  
bus illo inferior est.

COROLL. III. Et hinc spatium cuiusvis hyperbolæ EFG,  
circa suam axem FH, infinitus majus est spatio parabolæ  
ad eundem axem per ipsummet verticem descriptæ: il-  
lud enim eiusdem est ordinis cum spatio angulari, quod  
ostensum est infinitè majus parabolico.

COROLL. IV. Insuper hinc ratio elucet, cur impossi-  
bile sit Hyperbolæ Parabolæ inscribere, aut hanc illi cir-  
cumscribere, sive per eundem, sive per diversos vertices,

ut





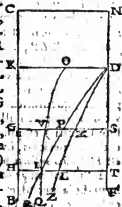
# Infinitorum &c. 55

ut habet Vincentius Viviani *lib. 1. de Max. & Min. prop.*  
 30; semper enim hyperbola suapte natura major est, quàm  
 parabola, unde nequit illa intra hujus fines concludi.

## P R O P O S I T I O : IX.

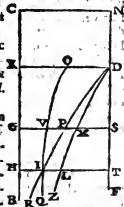
**V**arietatem ordinis Infinitorum item ac infinitis hyperbolis  
 demonstrare.

1. Eſto ſpatium  $DPRBK$ , ordina-  
 ta  $DK$  uni aſymptoto  $CN$  parallela,  
 & altera aſymptoto  $KB$ , atque hy-  
 perbola prima, ſive Apolloniã  $DPR$   
 infinite producta comprehenſum, tran-  
 ſeat verò per idem punctum  $D$  intra  
 eandem aſymptotoſ alia hyperbola  
 $DXLZ$ , cujus ordinatarum  $DK, XG$   
 quadrata ſunt reciproce, ut abſciſſe  $GC,$   
 $KC$  à centro  $C$ , ſive ut ordinatę  $DK,$   
 $GP$  ad priorę hyperbolam: ex utraq;  
 (ducta  $DF$  aſymptoto  $CB$  parallela)  
 ubique in continua ratione  $DK$  (ſeu  
 $GS$ )  $G X, GP$ . Secetur jam quilibet  
 ordinata poſterioris hyperbolę  
 nempe  $DK, XG$ , in puncto  $O$ , *Via*  
 data quavis ratione  $m$  ad  $n$ , per qua puncta intelligatur  
 tranſire alia curva  $OVQ$  ejuſdem utriuſque generis cum ipſa  
 $DXZ$ : eritque ſpatium  $OVQ$  ad ipſum  $KDXZB$  in  
 ratione  $KO$  ad  $KD$ , ſive  $m$  ad  $n$ , per conſtructionem: Por-  
 rò ubi  $DXZ$  pervenerit ad intervallum  $LH$  æquale ipſi  
 $OK$ , tunc debet ordinata  $LH$  ad ordinatam  $IH$  hyper-  
 bolę  $OVQ$  eſſe in ratione  $DK$  ad  $OK$ , ſive  $TH$  ad  $HL$ ,  
 erunt in continua ratione  $TH, LH, IH$ , & idẽd punctum  
 $I$  erit etiam ad primę hyperbolę Apolloniã  
 $LPR$ , quare ſecantur ſe curvę  $OVQ, DPR$  in pun-  
 cto  $I$ .



clo I, non amplius sibi occurrentes, eo quòd ratio HI ad BR semper futura est duplicata rationis HI ad BQ, ut de ipsis DXZ, DPR se in puncto D secantibus dicebatur. Et idèd spatium KOVQB, ad partes B infinite protensum, majus erit infinito spatio K DPR B ( nec enim portio OVIPD, qua primum spatium à posteriori desicere videtur, est in his computanda, quippe undecunque finita, adeoque infinite parva respectu dictorum spatiorum, sed attendi debet excessus QIR absolute infinitus, ut in Scholio III. demonstrabimus ) unde minor erit ratio spatii KDPRB ad KDXZB, quàm KOVQB ad idem spatium KDXZB, hoc est quàm sit ratio quævis assignabilis, *n* ad *m*; idèd que spatium ab Apolloniana hyperbola comprehendunt, est infinite parvum respectu spatii ab hyperbola quadratica definiti, & hoc vicissim, respectu illius ( licet absolute infiniti ) est infinite magnum, & ordinis superioris, sive *juxta defn. VII.* est *Plusquam infinitum*; quod &c.

2. Si aliorum graduum superiorum hyperbolæ per idem punctum D describantur, in quibus cubi, vel quadratoquadrata, aut alix altiores potestates ordinararum reciproce respondeant abscissis, simili modo demonstrabitur, areas hyperbolarum superiorum infinite majores esse arcis inferiorum, quantumvis jam infinitis, vel plusquam infinitis: supponatur enim DPR Quadratica hyperbola, & DXZ cubica, adèd ut hujus ordinararum cubi, illius verò quadrata reciproce sint ut abscissæ; fiat autem, proportionali sectione ordinararum DK, XG posterioris hyperbolæ, alia cubica hyperbolæ OVQ; eritque spatium KOVQB ad ipsum



# Infinitorum &c. 57

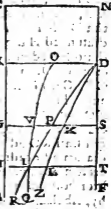
ipsum  $KDXZB$  in ratione  $KO$  ad  $KD$ , puta  $n$  ad  $m$ . Po-  
 ne jam, curvâ  $DXZ$  pervenisse ad intervallum  $LH$ , quod  
 sit ad  $HT$ , vel  $KD$ , ut quadratum  $KO$  ad quadratum  
 $KD$ , sive ut  $nn$  ad  $mm$ ; occurrat autem hyperbola quadra-  
 tica  $DPR$  ipsi ordinatæ  $HL$  in puncto  $I$ : eritque  $HI$  qua-  
 dratum ad  $HL$  quadratum in ratione composita ex qua-  
 drato  $HI$  ad quadratum  $KD$  [ sive ratione cubi  $HL$  ad  
 cubum  $KD$ , cum utraq; ratio sit reciproca abscissarum  
 $CK$ ,  $CH$  ) & ratione quadrati  $KD$  ad quadratum  $HL$ ,  
 aut cubi  $KD$  ad quadratum  $HL$  ductum in ahtudinem  
 $KD$ ; quæ duæ rationes constant rationem cubi  $HL$  ad qua-  
 dratum  $HL$  in  $KD$ , nempe ratione  $HL$  ad  $KD$ , idest *ex congl.*  
 quadrati  $KO$  ad quadratum  $KD$ . Cùm itaq;  $HI$  qua-  
 dratum ad quadratum  $HL$  sit ut quadratum  $KO$  ad qua-  
 dratum  $KD$ , patet ipsas  $KD$ ,  $LH$ , in  $O$ , &  $I$  proportiona-  
 liter secari, adedque punctum  $I$  pertinere ad cubicam etiam  
 hyperbolam  $OVQ$ , quæ propterea secabit ipsam  $DPR$   
 in  $I$ , nec illi amplius occurret, eo quod semper futurum  
 sit quadratum  $BR$  ad quadratum  $HI$ , ut cubus  $BQ$  ad  
 cubum  $HI$ , ut antea ostensum est; quare spatium  $KOIQB$ ,  
 ad partes  $B$  infinite protentum, majus erit infinito spatio  
 $KDPRB$ , ut superiori numero concludebamus, adedque  
 major erit ratio  $KDXLZB$  ad secundam, quàm ad pri-  
 mum, ad quod tamen esse potest in quavis assignabili ra-  
 tione  $DK$  ad  $KO$ , sive  $n$  ad  $m$ ; unde liquet, spatium  
 $KDXZB$  infinite adhuc majus esse spatio  $KDPRB$  ab hy-  
 perbola quadratica comprehenso, licet plusquàm infinitum  
 hoc ipsum antea deprehenderimus. Quod &c.

3. Et si quælibet ipsarum  $GP$ ,  $KD$  potestates ab expo-  
 nente  $n$  indicata reciprocè respondeant abscissis, ordina-  
 tive alterius hyperbolæ  $GX$ ,  $nD$  ad potestatem unitate  
 superiorum elevatis, semper his ipsis ordinatis in  $V$ , &  $O$   
 proportionaliter sectis, curva  $OVQ$  occurreret priori hy-  
 perbolæ  $DPR$  in  $I$ , ubi correspondebat ordinatæ poste-  
 rio-

H

rio.

rioris hyperbolæ HL, quæ sit ad KD, ut potestas  $e$  ipsius KO ad potestatem similem ipsius KD, unde renovabitur semper præcedens argumentum; idque generatim sic ostendetur. Sit  $KD = a$  & hyperbolæ DXZ ordinata quævis GX, aut HL ponatur  $= y$ , quæ si proportionaliter secetur in O, V per curvâ OVQ in ratione  $m$  ad  $a$ , occurrat hæc curva in I alteri hyperbolæ DPR, cujus ordinata quævis GP, HI  $= z$ ; ergo in concursu I fiet  $z = \frac{my}{a}$ , &  $z^m = \frac{m^m y^m}{a^m}$ ; estque  $z^m$  ad  $a^m$ , ut  $y^{m-1}$  ad  $a^{m-1}$ , ergo  $\frac{z^m}{a^m} = \frac{y^{m-1}}{a^{m-1}}$ , ut  $y^{m-1}$  ad  $a^{m-1}$ , &  $m^m y^m a^{m-1} = m^m a^m y^{m-1}$ , & rursus dividendo per  $y^m a^m$ , erit  $m^m a = m^m y$ , ideoque  $y$  ad  $a$ , ut  $m^m$  ad  $m^m$ , nempe ut potestas  $e$  ipsius KO ad similem ipsius KD potestatem; Quod &c.



COROLL. I. Hinc constat, omnes hyperbolas altioris gradus supra Apollonianam verè *Plusquam-infinitas* subdita Vallisii appellationem, & doctrinam censendas, utpotè infinites majores, atque hyperbolicis ordinariis ad asymptoton relectis: & quantumvis proportionali augmento, aut decremento singularum ordinarum, augeantur illæ, minuantur illæ, numquam hyperbolas unius generis posse cum hyperbolis altius generis comparari, ut dicitur in

COROLL. II. Consequens etiam hinc est, in Arcuum dimensionem non sufficere, ut quædam illarum absolute infinitæ demonstrentur, sed ampliùs requiri, ut ostendatur ad quem infinitorum ordinem, aut gradum pertineant: Quod facile est, observando ad quod infiniti aliunde non genus rationem assignabilem habere possint. Verbi gratia.

Spa-

# Infinitorum &c. 59

Spatium, à Conchoide Nicomedeæ cum asymptoto contentum, infinitum est ejusdem generis cum Spatio asymptotico hyperbolæ Apollonianæ, cui comparari potest *ex prop. 51. nostri libelli de Quadr. Circ. & Hyperb.* Item spatium à Quadraticæ Dinocrati ultra quadrantem continuata, & ab ejus asymptoto comprehensum, ad eandem classem spectat, ut ex ejus comparatione cum hyperbola Apolloniana, quam alibi exhibebimus, constare potest. Spatium quod curva Logarithmica, & recta ad ejus asymptotum parallela interiicitur, ejusdem ordinis est cum parallelogrammo infinite longitudinis, sed infinites minoris, quàm sit asymptotus Apollonianæ hyperbolæ. Spatium hyperbolicum, circa axem infinite productum excurrens, ejusdem ordinis est cum infinito spatio angulari. Area curvæ, quæ ab Insigni Geometra Hieronymo Sacherio in *Neoflascalib. 3. pr. 10.* infinita demonstratur, ad asymptotici spatii, quod Apollonii hyperbola complectitur, classem pertinere imò ad ejus dimensionem referri ostenditur: atque ita de aliis.

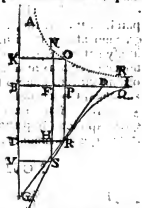
## S C H O L I O N I.

**O**Portes autem in horum Spatiorum comparatione supponere eandem æquè infinite in longum protensa, aliàs Infinitum ordinis inferioris æquari poteris Infinito superioris ordinis ad infinitam longitudinem inferioris gradus, seu priori infinites minorem applicato; Cùm enim Spatium asymptoticum hyperbolæ Apolloniana sit infinitum, usque æquivalens parallelogrammis inscriptis multitudine infinitis, qua si ad parem latitudinem componantur, efficiunt usque parallelogrammum infinite longum, ipsi hyperbolico spatio æquale; sed hæc ipsa infiniti parallelogrammi longitudo inferioris ordinis erit, sive infinites minor infinitæ longitudinis spatii hyperbolici: unde non mirum, quòd hoc modo summi utraq; spatia adæquantur.

At comparando parallelogrammum æquè infinite longum, ac sit

hyperbolicum spatium, quavislibet exigua fuerit parallelogrammi latitudo, semper, ex demonstratis, erit parallelogrammum infinitissimus spatii hyperbolico, quod ipsi asymptoto adiacet; ademque intellegas de aliorum, quae enumeravimus, spatiorum comparatione.

COROLL. III. Unde adhuc habetur, infinitam asymptoton Logarithmicam, seu Logisticam, infinitè maiorem esse infinita asymptoto hyperbolae Apollonianae. Nam quia Logistica  $QRS$  subtangens  $GT$  est ad quamlibet axi parallelam,  $PR$ , adeoque & quadratum  $TG$  ad rectangulum  $TG$  in  $PR$ , ut rectangulum hyperbolae inscriptum  $KOPB$  ad spatium hyperbolicum  $QR$   $OP$  (ordinatis  $QR$ ,  $PO$  interceptum) ex cap. 6. Higonian. n. 6. fit, ut si parallelogrammum hyperbolae inscriptum aequetur quadrato  $TG$ , etiam spatium quodvis hyperbolicum  $OPQR$  aequetur  $TG$  in  $PR$ , adeoque totum infinitum spatium hyperbolicum  $ABQBA$  aequabitur rectangulo eiusdem  $TG$  in asymptoton Logisticam infinitè productam  $BG$ ; Quare, ex precedenti, erit longitudo ipsius  $BG$  infinitè minor longitudine asymptoti hyperbolici  $BA$ .



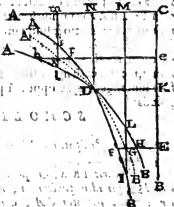
### SCHOLIUM II.

**I**ta observatio dignum est, spatia quavis asymptotica finita, longitudini quidem infinitae adiacere, sed infinitè semper minori, quam sit asymptotus hyperbolae Apollonianae. Nam & altiores hyperbolae. [ in figura sequenti ]  $AQDFB$ , quae parte ad asymptotum

# Infinitorum &c. 61

*asymptoton CA spatium finitum comprehendens, asymptoton infinite minorem, quam sit hyperbola asymptotus, obtinet; eo quod, cum sit semper et usque intus KD, e.g., utriusque asymptotus CA hyperbola quadrata f.D.F., qua parte finitum aream definit, ad asymptoton CA hyperbola Apolloniana g.D.G., in ratione minori qualiter data, qualem habet KD ad priorem CA, qua proportione mediat inter KD, & postremam CA; altioresque hyperbolae, qua parte finitum aream adhuc minorem cum asymptoto comprehendunt, habent, eadem ratione, asymptoton adhuc infinitesimam, sive ad superiorem gradum infinitatis consistentes. Similiter in Ciboide, in Corvoluta quadrantis, aliisque curvis asymptoticis, finitum aream comprehendentibus, observare erit, infinitam asymptoti longitudinem infinitesimam esse asymptoto hyperbola Apolloniana.*

**COROLL. IV.** Hinc etiam elici potest modus investigandi, quando Spacium quoddam asymptoticum ArooG aream finitam comprehendat, quando vero infinitam, vel adhuc plusquam infinitam, respectu ordinati loci hyperbolici inter asymptotos jacens, intercipiat: Si nempe spatio ArooG fiat reciproca figura Aaar, cujus scilicet ordinata ra contineant cum ordinata no rectangulum eidem constanti quadrato aequale; nam si tangens ab hujus figurae reciprocae quaeratur, & ejus generalis expressio referatur



ad

ad verticem A, constabit certè, an ibi tangens AB fiat ordinatæ  $ra$  parallela; an verò cum ipsa concurrat, in distantia finita ab axe  $Ar$ , an autem cum ipso axe  $Ar$  penitus coincidat; & in primo casu Spatiû  $AroG$  finitè erit: in secundo infinitum: in tertio plusquam infinitum. Innotescit autem ratio tangentes ducendi ex dictis coroll. 2. prop. V. undè generatim liquet, reciprocarû figurarû semper æquales fore subtangentes, ad oppositâ partè accipiendas.

## SCHOLIUM III.

**I**nfinisum esse Spatiû  $RIO$ , quo secunda hyperbola extra primam exorbitat, sic ostendamus. Dua hyperbola, Apolloniæna, seu linearis  $IKR$ , & quadratica  $IQ$ , per idem punctum  $I$ , inter easdem asymptotos  $CA$ ,  $CB$ , sunt descripta. Ordinetur qualibet  $BRQT$ . secantè lineæ, ut in figura. Ducatur asymptoto  $CB$  parallela  $RG$ , occurrens in  $G$  rectæ  $IM$ , tangenti priorè hyperbolæ ad punctum  $L$ ; & ducta  $RP$ , tangente ejusdem ad punctum  $R$ . quæ producta alteram tangenter ferit in  $V$  acceptoque in eadem prima hyperbola quantum proximo puncto  $x$ , per illud agantur coordinatæ parallele  $brq$ ,  $rSg$ ; ut junctæ  $CT$  fecerit primam hyperbolam  $imK$ , compleantur parallelogramma  $COKX$ ,  $CBRL$ ,  $AIHc$ . Jam propter  $AI$ ,





# Infinitorum &c. 63

sive CH ad CB, ut BR; sive HE ad CA vel BF, erit parallelogrammum CHEL simile ipsi CBTA, adeoque circa eundem diametrum ET consistens; quare & CT erit diameter hyperbola RKI, ut postè bisecans subtensam RI, qua altera diameter est parallelogrammi ERTI, quare eadem CT per tangentium occursum V transibit: ex 29. 2. Conic. Præterea cum sit AC, sive BT, ad KX, ut BC ad CX, sive ut KK ad BR, erunt BT, XK BR in continua ratione; & BD vel HI ad certiam BR, ut quadratum prima HI ad quadratum media XK; sed ex natura hyperbola secunda, ut HI ad RB, ita & quadratum HI ad quadratum BQ, ergo XK æquatur BQ, & junctâ QKO erit asymptota parallela. Cuius sit autem GF (qua ipsi RQ parallela ducitur ex puncto G, & tangente RV in puncto F limitatur: nec enim semper coincidet GF cum ordinata KX, ut hoc loco Sculptor expressit) minor semper ipsa, RQ, metiente intervallum parallelarum RG, QK; consequens est; ut major sit ratio RQ ad RG, quam GF ad eandem RG, vel (ob similitudinem triangularum FGR, RBP) quam AB ad BP, aut RS ad ST; ideoque major erit: nonnullarum QR in RS (nempe elementare spatium QRT) vel angulo GR in RS (nempe spatio RIGF); quare & ratio minorant QIR major erit utriusque RIMP: quod cum sit infinitum (ob infinitatem asymptotici spatii prima hyperbola præter à fortiori infinitum fore & bilineum QIR; Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO X.

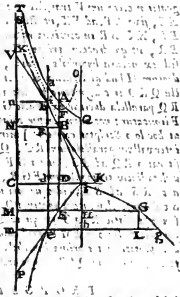
**S**patium Infinitum; videlicet infinitæ minimæ Asymptotico Spatio Apolloniana Hyperbolæ minime, ut dicitur in Apollonio.

Ne quis suspicetur; spatium asymptoticum hyperbolæ Apollonianæ minimum esse omnium infinitorum spatiorum, quia nullam hactenus aream novimus infinitam, quæ aut ejusdem, aut superioris gradus non sit ad prædictum spatium: libet hoc loco etiam describere, absolute quidem

inf.

infinitam, sed infinities minorem dicto asymptotico spatio Apolloniano: ex quo facile erit similes areas adhuc infinities minores excogitare, & assertam varietatem ordinis Infinitorum sine ullo limite (ut *prop. VIII.* prædiximus) admittendam ostendere.

Inter asymptotos  $CI$ ,  $CV$  descripta sit hyperbola Apolloniana  $QANT$ , abscindens primam ordinatam  $QI$  æqualem  $IC$ ; & subtangente  $CI$  agatur Logarithmica  $IE$  ad axem  $CP$ ; cui parallela posita  $IH$ , fiat ad axem  $IE$  parabola  $IGg$ , cujus latus rectum sit: duplex ipsius  $CI$ , & productis eius ordinatis  $GH$ ,  $g\delta$ ; logarithmicæ occurrentibus in  $E$ , & ejusque axe in  $M$ , agantur ad axem parallela  $EDA$ ,  $eda$ ; tum ut ne



angulum ex  $ME$  in  $HG$  ad quadratum  $CI$ , ita sit eadem  $CI$  vel  $IQ$  ad  $DF$ , ac per omnia puncta  $F$ , sic determinata transeat curva  $OFfS$ . Dico spatium binis asymptotis parallelis  $IO$ ,  $CS$ , curva  $QfFS$ , & recta  $CI$  comprehensum, absolute quidem esse infinitum, sed infinities minus spacio hyperbolico  $CIQANT$ .

Facta enim  $DB$  æqualis  $HG$ , itemque  $db$  æquali  $bg$ , atque ita semper, oriatur hinc alia curva  $IEbX$ ; suntque  $AFBDEHG$ ,  $afbdebfg$  infinitè proxime: cum ipsarum  $BD$ ,  $bd$  differentia  $bR$ , ex constructione, æqualis differentia

# Infinitorum &c. 65

tiz  $Lg$  correspondentium  $HG$ ,  $bg$ ; eritque  $BR$  ad  $Rb$ , ut  $BR$  ad  $Lg$ , nempe in ratione composita ex  $BR$ , seu  $Dd$  differentiarum ordinatarum Logarithmicæ, ad  $Hb$ , five  $Mm$  differentiam axis ejusdem, & ex  $Mm$ , seu  $GL$  differentia axis parabolæ ad  $Lg$  differentiam ordinatarum ejus; est autem ex *coroll. 1. prop. V.* prima ratio æqualis rationi ordinatæ  $ME$  ad subtangentem  $MP$  vel  $CI$ , & ratio altera æqualis rationi subtangentis parabolæ, seu duplæ  $IH$ , ad  $HG$ , vel duplæ  $HG$  ad latus rectum, aut simplicis  $HG$ , ad  $CI$  semilem lateris recti; ergo  $BR$  ad  $Rb$  est in ratione composita ex  $ME$  ad  $CI$ , &  $HG$  ad  $CI$ , scilicet ut rectangulum ex  $ME$  in  $HG$  ad quadratum  $CI$ , hoc est, ex constructione, ut  $CI$ , vel  $IQ$  ad  $DF$ ; quare extremarum rectangulum ex  $FD$  in  $BR$  (quod est idem cum spatulo infinite parvo  $FDdf$ , per *coroll. 3. prop. V.*) æquabitur rectangulo mediarum  $IQ$  vel  $CI$  in  $Rb$ ; quod cum ubique perpetuò obtineat, manifestum est, totum spatium  $SfFOIC$ , ex omnibus arcibus elementaribus  $FDdf$  aggregatum, æquari rectangulo ex  $IQ$  vel  $CI$  in totam asymptotum  $CX$ , quæ omnibus differentis  $Rb$  ordinatarum æqualis est: adeoque cum  $CX$  sit infinita, utpotè æqualis ordinatæ parabolæ ad infinitam distantiam à vertice, patet, spatium illud  $SfFOIC$  rectangulo infinito æquale probari, & sic esse absolute infinitum: sed hyperbolicum spatium  $CIQAAT$  æquatur rectangulo ex eadem  $IQ$ , vel  $CI$  in totam axem infinitum  $CP$  Logarithmicæ (nam, est *cap. 6. Hugonianorum n. 6.* subtangens  $CI$  est ad quamlibet  $DE$  parallelam axi Logisticæ, vel dicas  $CI$  quadratum ad  $CI$  in  $DE$ , ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum  $CDA$ , quod æquatur quadrato  $CI$ , propter  $QI$  æqualem  $CI$ , ad spatium hyperbolicum  $AQID$ , quod exinde æquabitur in hoc casu rectangulo ex  $CI$  in  $DE$ , adeoque totum spatium asymptoticum fiet æquale rectangulo ex  $CI$  in totam axem  $CP$ ) erit ergo spatium  $CIQAAT$  ad spatium



# Infinitorum &c. 67

in ipsa DC producta ab hac perpendiculari resecta, æqualis ordinatæ DA hyperbolæ: etenim est VN ad NB, ut BD ad DK, vel ut prædicta subnormalis ad ordinatam BD seu CN, adeoque rectangulum extremarum VNC [hoc est, per præcedens corollar. quadratum CIQ, vel rectangulum CDA, ob hyperbolam] æquatur rectangulo mediarum NB, vel CD in subnormalem, quare eadem subnormalis æquatur AD ordinatæ ad hyperbolam.

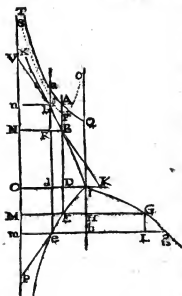
COROLL. IV. Unde ampliùs ostendi potest, spatium hyperbolicum AQID æquari dimidio quadrati ex ordinata BD: posita enim  $CD = x$ ,  $DB = y$ , & dicta subnormalis  $= p$ ; erit  $p$  ad  $y$ , ut  $dy$  ad  $dx$  (nempe ut Rb ad RB) quare  $pdx$  [sive, ob  $p = AD$ , spatium  $ADda$ ]  $= ydy =$  dimidio differentialis  $xydy$ , quæ ex Schol. prop. V. est differentia quadrati  $yy$ ; & ideo, integrando, totum spatium AQID æquatur dimidio quadrati BD. Quod & hinc expeditiùs patet, quia ex ostensùs in demonstratone hujusmet propositionis, spatium hyperbolicum AQID æquatur rectangulo ex CI in DE, vel IH, quadratum autem BD, vel HG, ex natura parabolæ, æquatur rectangulo ex eadem IH in duplam CI, quæ est latus rectum, ergo idem spatium hyperbolicum AQID est dimidium quadrati HG, vel BD.

## SCHOLIION

**M**anifestum est, curvam IBb esse Logarithmicam quadraticam, ex earum genere, quas Hugenianorum cap. 1. n. 4. indicavi, de quibus & egregium tractatum, genesi à nobis perhumaniter accepta, conscripsit insignis Geometra Laurentius Lorenzini, quem utinam cum aliis tractatibus, res geometricas accuratissimè, & profundissimè illustrantibus, typis aliquando committeres! Enimmerò patet, quòd cum in prima Logarithmica IEe sit rasso IC, ME ad rationem IC, m'è, ut

I 2

CM



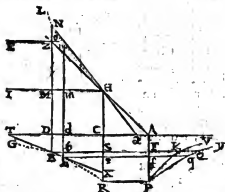
CM ad Cm, vel IH ad Ih: cujus rationis subdupli-  
 cata est ratio ipsarum HG,  
 hg, seu BD, bd, potest fore  
 BD ad bd, sive NC ad  
 nC, in subduplicata ratione,  
 ejus, quam habet ratio dua-  
 rum CI, NB ad rationem  
 duarum CI, nb, aut illam  
 rationem ad hanc esse, ut qua-  
 dratum distantia CN ad qua-  
 dratum distantia Cn. Simi-  
 liter, si loco parabola qua-  
 dratica IG & posita fuisset  
 alterius altioris ordinis para-  
 bola, ex ejus ordinatarum  
 HG translatione in DB,  
 orta fuisset altioris adhuc or-  
 dinis logarithmica, ejusque  
 tangens, & alia functiones si-  
 milis investigatione detege-  
 rentur.

## PROPOSITIO XI.

**Q**uadratica hyperbola cum Apolloniana specialior comparatio,  
 ad ejus altiore m infinitatem demonstrandam.

Sit inter asymptotos RCA [ ut in figura sequenti ] per  
 angulum P quadrati RPA C descripta hyperbola Apolla-  
 niana PKV, & hyperbola quadratica PQY, in qua sit  
 SQ ad RP, ut quadratum RC ad quadratum CS, vel ut  
 quadratum SK ad quadratum RP, adeoque tres SQ, SK,  
 RP sint perpetuo proportionales; descripta sit etiam ad  
 axem ACT Logistica RBG, ad partes G decrescens, cu-  
 jus

ius subangés TD  
equetur CK: iteq.  
facta CH æquali  
CR, ponatur  
HNL continua-  
tio ejusdem Logi-  
sticæ, quæ ex R  
ad partes AP ex-  
porrigi debebat,  
ad eandem partes  
asymptoti CT re-  
flexa, & ed ver-  
sus in infinitum se  
expandens. Itaq.



ob æqualem, imò eandem axis portionem CD, ordinatis  
BD, CR, & CH, DN interceptam, erit semper DB ad  
CB, ut CR vel CH ad DN, sed etiam ut DB vel CS  
ad CR, ita in hyperbola Apolloniana RP (vel CR aut  
CH) ad SK, ergo DN æquatur semper correspondenti  
ordinatæ hyperbolicæ SK: factaque *addisq* infinite pro-  
xima prioris; cum sit SQ ad SK, ut SK ad RP, vel ut  
AC ad CS, vel ut TD ad DB, vel ut B6, aut Dd, ad 66  
vel 2S, erit rectangulum extremæ QS, æquale rectan-  
gulo mediarum, scilicet SK, vel ND in Dd, & sic sem-  
per, unde spatium hyperbolæ quadraticæ SRPQ per co-  
roll. 3. prop. V. æquale ostendetur correspondenti spatio Lo-  
gistico NHCD; sed ex ostensis in demonstratione prop. præ-  
ced. & in coroll. 3. prop. IX. Spatium hyperbolicum SRPK  
æquatur rectangulo ex CR in logarithmum CS, scilicet  
in BS, hoc est, ducta HMi asymptoto parallela, æqua-  
tur rectangulo correspondenti CHMD, ergo spatia SRPQ,  
SRPK sunt semper ad invicem, ut NHCD, MHCD;  
& ubi punctum S cadit in C, erit totum spatium hyper-  
bolæ quadraticæ CRPQY ad spatium Apollonianæ CRPKV,  
ut





# Infinitorum &c. 71

hyperbolæ quadraticæ CRPQY esse infinities majus spatio Apollonianæ CRPKV, adeoque *plusquam infinitum* censendum; etenim ubi S cadit in C: tum rectangulum CDBS evanescit, aut saltem fit infinitè minus spatio integræ logisticæ TCRBG, seu quadrato subtangentis CR: tum ipsa SX evadit infinitè parva respectu SR, quæ tunc fit CR; undè spatium hyperbolæ Apollonii CRPKV, evadat infinities minus spatio hyperbolæ quadraticæ CRPQY necesse est.

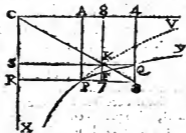
COROLL. IV. Rursus, quia spatium SRPQ ad SRPK ostensum est esse, ut NDCH ad MDCH; est autem NDCH æquale rectangulo ex subtangente logisticæ CH in MN, erit primum spatium ad secundum, ut NM ad MH; sed NM ad MH potest rationem habere majorem, qualibet assignabili, si concipiatur accedere magis, ac magis punctum S ad centrum C, adeoque ab eodem C magis ac magis recedere ordinata logisticæ DN, nam MN ultra tangentem HZ, quæ ad angulum semirectum ZHM, sive HAC inclinatur, in immensum excrescit, unde ratio NM ad MZ, vel MH, semper fit major, prout (juncta NHa) fit semper sine limite major ratio HC ad Ca; ergo NM evadit infinities major, quàm MH, ubi punctum S cum puncto C convenierit, & ideo spatium CRPQY erit tunc infinities majus ipso CRPKV, ac proinde *plusquam infinitum* hac etiam ratione colligitur.

## S C H O L I O N.

**F**X ostensis in hac propositione, quòd DN, ordinata figura HNL, sit semper æqualis correspondens SK, ordinata hyperbola PKV, colligitur expeditus modus generalis describendi data cuilibet figura RBG suam Reciprocam HNL: descripta enim hyperbola Apolloniana PKV, quia semper rectangulum CSK æquatur ipsi CRP, fit, ut si ad puncta D, C oriantur ipsæ DN, CH æquales respectuò ipsi SK, RP, utique etiam rectangula NDB, HCR æquantur, adeoque figura HNL evadat Reciproca ipsius RBG. PRO.

## PROPOSITIO XII.

**I**dem aliter rursus, ad abundantio-rem scienciam, demonstrare. Hisdem positus, ducatur  $CK$ , conveniens cum  $RP$  producta in  $3$ , & jungatur  $3Q$  occurrens asymptoto  $CA$  in-



$4$ ; eritque  $R_3$  ad  $SK$ , ut  $RC$  ad  $CS$ , ut  $SK$  ad  $RP$ , vel ut  $SQ$  ad  $SK$ ; igitur  $\propto$ uales erunt  $R_3$ ,  $SQ$ , unde  $3Q_4$  erit asymptoto  $RSC$  parallela, cui per  $R$   $\propto$ quidistant patiter fiat  $7K_8$ ; Jam verò ex demonstratis *cap. 8. Hægmianorum*, n. 11. Spatiuntur

infinitè longum, ab hyperbola quadratica  $PQ$  ad partes asymptoti  $SR$  versus  $X$  infinitè producta comprehensum, est finita quantitas, & semper  $\propto$ quatur inscripto rectangulo eidem ordinatæ adiacenti, nempe  $RSQPX$   $\propto$ quatur  $CSQ_4$ , & solum  $RPX$   $\propto$ quatur  $CRPA$ , vel huic  $\propto$ quali  $CSK_8$ ; Ideoque utriusque differentia, nempe spatium  $SRPQ$   $\propto$ quatur residuo  $8_4QK$ , vel  $\propto$ quali complemento  $SK_7R$ , quod eidem latitudini  $SR$  adæcet cum spatio  $SRPQ$ , sed longitudinem habet  $\propto$ qualem applicatæ correspondenti  $SK$  hyperbolæ Apolloniæ, atque ita semper; ergo ubi congruerit  $SK$  asymptoto  $CA$ , fiet integrum spatium  $CRPQY$   $\propto$ quale rectangulo ex  $CR$  in asymptoton hyperbolæ Apollonii  $CAV$ ; sed hoc rectangulum, *ex prop. VIII. n. 3.* est infinities majus spatio asymptotico hyperbolæ Apollonii, ergo spatium  $CRPQY$  quadraticæ hyperbolæ est infinities majus dicto spatio Apolloniæ hyperbolæ, unde à *Cl. Vallisio* jure *Plasquàm Infinitum* dici potnit. Quod erat &c.

CO.

# Infinitorum &c. 73

COROLL. I. Ex quo spatium SRPQ ostensum sit æquale rectangulo SK 7 R, ablato communi SRPEK, erit KEQ = ipsi KEP, & appposito communi 7EQ<sub>3</sub>, fiet PEQ<sub>3</sub> æquale K 73 Q.

COROLL. II. Unde & spatium SRPQ ad PEQ<sub>3</sub> erit, ut 8KQ<sub>4</sub> ad 7KQ<sub>3</sub>, nempe ut CS ad SR, & componendo, RSQ<sub>3</sub> ad PEQ<sub>3</sub> erit, ut CR ad RS, ac per conversionem rationis, RSQ<sub>3</sub> ad SRPQ, ut CR ad CS.

COROLL. III. Quia verò spatium SKPR = rectangulo ex CR in logarithmum CS (*vide fig. pag. 70.*) nempe in SB ex coroll. 3. prop. IX. erit SKPR ad SQPR in ratione composita ex CR, vel RP, ad SK, & ex logarithmo CS, nempe SB, ad SR, idest in composita ratione ex SC ad CR, & SB ad SR, hoc est ut rectangulum Logisticæ inscriptum CSBD ad rectangulum ex CR in RS, sive ad Logisticum spatium CDBR: quod consonat jam ostensis coroll. 1. prop. præced. unde rursus eadem inferri possunt, quæ deinceps in sequentibus corollariis demonstrata sunt de altiori Infinitate hujus spatii.

## S C H O L I O N.

**H** Alenus multipliciter probavimus diversitatem ordinis Infinitorum a Varignonio controversam, idque iis argumentis, quibus subesse posse hallucinationem, de sumenda expressione spatiorum ejusmodi ad contrarias partes, omnino non video; hæc enimmerò exceptione Vir gravissimus usus est adversus Vallisium, scilicet ipsum non observasse, negativum valorem urearum hyperbolicarum superiorum Apolloniana, non indicare altiorem infinitatem ipsarum, sed contrariam dumtaxat positionem, adeo tantam quidem quantitatem exprimat, sed ad oppositas partes accipiendam: quod ipsum antea monnerat Georgius Cheyneus Collega noster, libro Londini impresso 1703 De Methodo Fluxionum inverfa, pag. 66. his verbis: Quodli quadraturæ expref-

K

pressio affirmativa fuerit, area adjacet tam abscissæ, quam ordinatæ: si negativa fuerit, cadit ad partes contrarias, & adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ: ubi etiam statim subdit exemplum infinitarum hyperbolarum. Quam sanè legem nos minimè improbamus, & saltem in hyperbolarum casu (ex accidentino, an snapte generali natura, hic non inquiri, sed vide dicenda infra in Epist. subijuncta post Lemm. 12.) obtinere fatemur: quemadmodum & idem, independenter à Cbeynai libello ipfis nondum viso, animadvertendum censebatur anno 1704 Doctissimi Viri, quos Bononia convoceram, & quibuscum de hac Infinitorum materia, deque natura negativarum quantitatum in Marsiliano Musæo diserebam, videlicet Eustachius Manfredi Matheosæ Profess. celeberrimus, & Victorius Stanchari, quem Geometria, Analytica, Physica, & Astronomia sibi nunc [heu nimis immatura!] mortis invidia præceptum dolent; neque tamen magnitudinum plusquam infinitarum existentiam negabat ullus ipsorum, sed varios infiniti gradus exprimendos potius arbitrabatur Stancharius per rationem  $a$  ad  $0$ , aut  $a^3$  ad  $0$ , vel  $a^4$  ad  $0$  &c. (sem per duplicatam, triplicatam, quadruplicatam &c. rationis simpliciter infinita  $a$  ad  $0$ ) quam per rationem positivi ad negativum,  $a$  ad  $-1$ , vel  $a$  ad  $-2$ ; neque enim signum negativum reddere quantitates nibilo minores, ut multis ratiociniis confirmabat, sed ad partem oppositam detaxat retrocedentes: quare & expressionem negativam hyperbolarum plusquam infinitarum, verificari satis, accipiendo ipsarum aream ad plagam oppositam, ubi valor ipsarum finitus est. Exstant adhuc apud me doctissimi Juvenis epistole, quas post meum in Etruriam reditum, 13 Janis, 10, & 24 Julii dicti anni 1704, bis de rebus transmisit, ut sententiam suam clarius exponeret. Sed, hac doctrina admissa, non ideo concesserim Varignonio, cui Plusquam infinitum contradictionem involuere, cum aliunde, quam per quantitatum nibilo minorum expressionem probari possit, aut in assertione hyperbolarum plusquam infinitarum ha'ncinatam propterea fuisse Vallisium, quod non animadvertit,

teris, negativas quantitates, aream contraria positione accipendam significare: nam in Algebra sua cap. 66, & 67 expressit hanc doctrinam ipsemet Vallisus firmaverat, & disertis verbis Volum. 2. Op. Math. pag. 286. dixerat: impossibile est, quantitatem ullam negativam esse, impossibile est enim, ut ulla magnitudo sit minus quàm nihil, aut ullus numerus paucior quàm 0. Nec tamen est ea suppositio aut inutilis, aut absurda, modò rectè intelligatur. Quamvis enim quo ad puram notationem algebricam, innuere videatur nota — magnitudinem, quæ minor sit, quàm nihil; cùm tamen physicam subit considerationem, magnitudinem non minus realem denotat, quàm ipsum †; Sed sensu suppositioni contrario interpretandam. Verbi gratia si quis promoti fuerit 5 passibus; atque tum retrocedere passibus 3; atque tum interroget quispiam, quantum promotior sit factus? Dicitur 3 passibus promotior, propter  $5 - 2 = 3$ ; si autem, postquam processerat 5 passibus, retrocedat passibus 8; atque tum interroget quis, quantum sit promotior? respondebitur — 3 passibus [ propter  $5 - 8 = -3$  ] hoc est tribus passibus minus promotus &c. Quod & aliis exemplis geometricis deinceps ostendit; itaque non sufficiatur Vallisus, negativas quantitates oppositum solum respicere, quoties datam habens positionem, ut qualibet physica, & geometrica magnitudines habent: at si de numeris purè abstractis sermo sit, qui à situ non pendunt, quomodo eos Algebra versat: hoc modo, inquam, cur minores nihilo dici non debeant numeri negativi, cùm resultent ex majorum subtractione à minoribus? Si 4 ex 7 subtraham, video relinqui 3; si 4 ex 4 auferam, relinqui 0, seu merum nihil; si 4 ex 1 auferam, an non minus quàm nihil supererit? an contendam superesse idem, quod superest ablatis 4 ex 7? hoc certe descendendum foret, si — 3, quod est residuum subtractionis 4 ex 1, possivè accipi deberet pro tribus unitatibus majoribus nihilo, sed inversum solum [ quem vero solum in his abstractis à materia, & à loco mihi fingam? ] servantis. Quidquid id est, indultum

saltem à VValliso, & à præstantissimis Geometris admissum, altiore Infinitatis Ordinem, hac una Varignonii exceptione [ cameræ unctæque solida ] non infringi, manifestum est, quippe argueretur tali exceptioni minime obnoxii, & ab ejusmodi tricaram, circa negativa quantitatis naturam successentium, controversia non pendens, ejusmodi causâ hæcenus multipliciter propugnata, & abundè confirmata hic dedimus. Tanta enim dumtaxat ratiuncula fidens ab ejus sententia discesserim, nisi postquam, in omnem partem hoc argumento versato, sibi ubique constans altiori Infinitatis testimonium rade multipliciter exprimere potui, VVallsiana doctrina manus dederim, nec prætermiserim à primis usque initiis suis magni hujus mysteriorum rationem ex ordine deducere; & cum Vir. Cl. cui per astruus ferias hanc Tractatum legendam obtuleram, antequam adhuc unquam (quod nonnulla, qua ex nostro Hugensiorum Theorematum Tractatu, abs se non ante perlecto, pendebant, sibi obscuriora visa fuissent) sententiam suspenderet; prolixa Epistola, in qua expressam Lemmatum omnium hæc pertinentium demonstrationem, aliunde quàm ab elementis plainis, & concisè non pendens, proposui, & controversia hyperbolica spatia Plusquam infinita verè censendi esse inde rursus conclusi, illam demique ad affirmatum mirabilis hujus veritatis adagi, atque unquam deinde ipsi scrupulum, unam vel alteram difficultatem tibi obscuram expedire, pensas ademi. Itaque hanc ipsam Epistolam, Lectorum meorum usui pariter profuturam, hic adnectere placuit, opportunam hinc Tractatus coronidam  
 hæc  
 apponere impo-  
 positu-  
 ras.

## EPISTOLA GEOMETRICA

Ad Illustrissimum Equitem

## D. ASCANIUM LIPPI

ARETINUM.

**R**editum tibi in Patriam prosperum gratulor, Vir Illustrissime, teque acriori, quam antea, studio Geometricarum, ac Mechanicarum rerum contemplationi animum impendere decrevisse, laetus accipi. Interim verò obscuriorem tibi accidisse non paucis in locis Tractatum nostrum, *De Infinitis Infinitorum, atque Infinitis parvorum Ordinibus*, quem superioribus ætatis feriis tibi legendum obtuli, mirari desino, postquam retulisti, Hungarica nostra, ex quibus multæ harum demonstrationum pendere, à te minime hæcenus fuisse perlecta; Ne tamen animo despondeas, ad hujus enim admirabilis Veritatis lucem, quam tantoperè tibi manifestari desideras, me facere preferente, statim admitti poteris, ubi nonnullis Lemmatibus id omne supplevero, quod nostræ demonstrationis progressus aliunde perspectum supponit; sit ergo.

LEMMA I. Ex punctis quovislibet  $L, K$  Hyperbola Apollonianæ  $KI$ , ductis alteri asymptoto parallelis  $IA, KO$ , junctisque ad centrum  $C$  rectis  $IC, KI$ , erit sector hyperbolicus  $KCI$  æqualis quadrilatero  $OAIK$ .

Nam parallelogrammorum  $CAIM, COKS$  (ex 12. 2. conic.) æqualium,



dimi-

dimidia sunt triangula  $CAI$ ,  $COK$ , quæ idem æqualia sunt, & communi ablato triangulo  $COF$ , apppositoque utrinque trilineo  $FIK$ , manifestum est, sectorem  $KCI$  æquari quadrilneo  $OAIK$ .

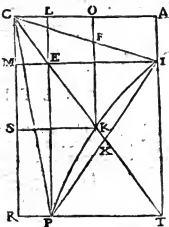
COROLL. Hinc patet quadrilinea  $KIAO$ ,  $KIMS$  eidem sectori  $KCIK$ , adeoque & invicem esse æqualia.

LEMMA II. *Sint in asymptoto  $CA$  tres rectæ proportionales  $CL$ ,  $CO$ ,  $CA$ , & ad hyperbolam ordinantur alteri asymptoto parallela  $LP$ ,  $OK$ ,  $AI$ : Erit punctum  $K$  vertex portionis  $PKI$ .*

Completis parallelogrammis, ut in figura, erit ex natura hyperbolæ,  $CL$  ad  $CO$ , ut reciprocè  $OK$  ad  $LP$ , quare etiam ipsa  $CO$  ad  $CA$ , ut  $OK$  ad  $AT$ : & idem parallelogrammum  $COKS$  erit simile ipsi  $CATR$ , & circa eandem diametrum  $CT$  (26. 6. elem.) consistet; similiter cum sit  $OK$  ad  $AI$ , vel ipsi parallelam  $LE$ , ut  $AC$  ad  $CO$ , vel  $CO$  ad  $CL$ , erit & parallelogrammum  $CLEM$  circa eandem diametrum ipsorum  $COKS$ ,  $CATR$ ; & quia  $ET$ ,  $PI$  sunt diametri parallelogrammi  $EITP$ , se mutuo secabunt in  $X$ ; Igitur recta  $CX$ , quæ ex centro bisecat applicatam  $PI$ , diameter erit portionis, & per ejus verticem transibit; ostensa est autem transire per punctum  $K$ , ergo  $K$  est vertex diætæ portionis.

LEMMA III. *Isidem positis, quadrilinea  $AIKO$ ,  $OKPL$ , quæ ordinatis ad terminos continue proportionalium interceptantur, æqualia erunt.*

Nam





Nam & triangulum XCI æquatur XCP, & portio XKI æqualis est portioni XKP, cum diameter KX bifecet applicatam PI, & portionem PKI: quare sectores KCI, KCP, adeoque & quadrilinea AIKO, OKPL, ex *lemm.* i. æquabuntur.

LEMMA IV. Si fuerint LC, CB, & OC, CA proportionales, ordinatis inde ad hyperbolam LP, DQ, & OK, AI, intercepta quadrilinea LPQD, OKIA pariter æqualia erunt.

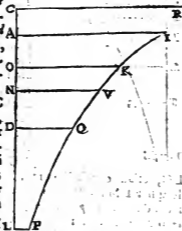
Sumpta inter DC, OC media proportionali NC, hæc media erit etiam inter LC, AC propter rectangulum LCA æquale ipsi DCQ, seu quadrato CN; ergo ordinata NV, erit ex *lemm. præced.* quadrilineum ANVI æquale quadrilineo NLPV; itemq. ONVK æquale NDQV; quare & residua AOKI, DLPO æqualia manebunt.

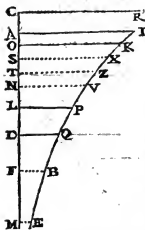
LEMMA V. At si major, aut minor foret ratio LC ad CD, quam OC ad CA, effet quadrilineum LPQD majus pariter, aut minus, ipso OKIA;

Quippe aucta CL; augetur primi quadrilinei extensio, & illa decrescente hæc pariter minueretur.

LEMMA VI. Ordinatur ad hyperbolam dua, qualibet AI, OK, & dua alia LP, DQ, erit ratio duarum OC, CA ad rationem duarum DC, CL, ut quadrilineum IAOK ad PLDQ.

• Multiplicetur enim utcunque ratio duarum OC, CA, sum-





tumptis quolibet continè proportionalibus SC, TC, NC, quibus respondebunt, *per lemma 3.* æqualia quadrilinea prioribus ordinatis, alisque SX; TZ, NV interiecta: adeò ut quàm multiplicata fuerit ratio NC, AC. rationis OC, AC, tam multiplex resultet quadrilinum NVIA quadrilinei IAOK. Similiter multiplicata utcumque ratione DC, LC per quorlibet contiòs proportionalis FC, MC, ostendetur æquè multiplex fore quadrilinum PLME ipsius PLDQ: & eisdem si ratio NC, AC æqualis fuerit rationi MC,

LC, etiam quadrilinum VNAI *per lemma 4.* fiet æquale ipsi PLME; sin prima ratio major, aut minor fuerit secunda, etiam *per lemma 5.* primum quadrilinum fiet altero majus, aut minus; quare ut ratio OC, AC, ad rationem DC, LC, ita quadrilinum IAOK ad ipsum PLDQ, ob antecedentium æquè multiplicia præfatomodo respondentia æquè multiplicibus consequentium, ut exigit terminorum proportionalitas *ex def. 6. 5. elem.*

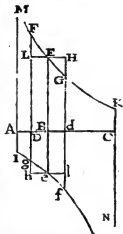
**LEMMA VII.** Si recta AC (ut in fig. sequenti) secta utcumque in B, iterum secetur in D, inter A & B, aut in d, inter B, & C, erit ratio duarum BA, DA ad rationem duarum DC, BC in majori proportione, quàm BC ad AB: at ratio duarum dA, BA ad rationem duarum BC, dC in minori proportione erit, quàm BC ad AB.

Per terminos A, C ductis parallelis KCN, IAM, & facta CK æquali AI, ex K, & I ducantur duz hyperbolz æquales KGEF, Igefi; inverfo situ positæ in angulis asym-

# Geometrica. 81

afymptoticis CAM, ACN, ad quas ordinata per punctum B recta EBe, reliquis afymptotis parallela, & per puncta D, d pariter ordinatis FDg, Gdf, per puncta E, e ducantur ipsi AC parallelae LEH,

le b; eritque per lemma 6. ratio duarum BA, DA, ad rationem ipsarum DC, BC ut spatium FEED ad DBeg, hoc est in minori ratione, quam [diminuto antecedente, & aucto consequente] quae sit parallelogrammorum EBDL, eBD b, sive quam EB ad Be, aut BC ad AB (nam aequalia sunt parallelogramma aequalibus hyperbolis inscripta EBA, eBC, adeoque latera habent reciproca) At è contrario ratio duarum dA, BA ad rationem ipsarum BC, dC est eodemo lemma 6. ut EGdB ad B dfe, quae ratio minor est, quam (aucto antecedente, & minuto consequente.) parallelogrammorum EHdB, Bdle, seu quam EB ad Be, scilicet BC ad AB; & igitur major est in primo, & minor in secundo casu proportio dictarum rationu, quam sit ratio partium BC, AB, ut fuit propositum.



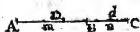
LEMMA VIII. *Esse AB ad BC in ratione qualibet, m ad n.*

Dico, factum ex potestate ipsius AB, cujus index m, in potestatem ipsius BC, cujus index n, esse omnium similium maximum, id est majus, quam si, alibi secta AC in D vel d, sumeretur factum ex similibus earum partium potestatibus per eosdem indices denominatis.

Nam quia ratio duarum AB, AD ad rationem duarum DC, BC est in minori proportionem, per lemma 7. quam BC ad AB, id est quam m ad n per hypothesim, erit factum

L

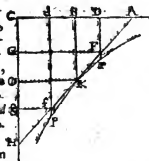
rum



Sum extremorum majus factio mediorum id est ratio duarum AB, AD multiplicata

per  $m$  [ seu ratio  $\overline{AB}^m$  ad ipsum  $\overline{AD}^m$  ] major erit ratione DC, CB multiplicata per  $n$  [ hoc est ratione  $\overline{DC}^n$  ad  $\overline{CB}^n$  ] unde rursus factum extremorum  $\overline{AB}^m$  in  $\overline{CB}^n$  majus erit factio mediorum  $\overline{AD}^m$  in  $\overline{DC}^n$ . Similiter ostendetur, quod cum sit rationis duarum  $dA$ , AB, ad rationem ipsarum BC,  $dC$ , minor proportio, quam BC ad AB, seu quam  $a$  ad  $m$ , erit prima ratio multiplicata per  $m$  ( hoc est  $\overline{dA}^m$  ad  $\overline{AB}^m$  ) minor secunda multiplicata per  $n$  ( id est  $\overline{BC}^n$  ad  $\overline{dC}^n$  ) & ideo factum extremorum  $\overline{dA}^m$  in  $\overline{dC}^n$  minus erit factio mediorum  $\overline{AB}^m$  in  $\overline{BC}^n$ ; quare ipsum  $\overline{AB}^m$  in  $\overline{BC}^n$  est omnium similium maximum.

LEMMA IX. Inter asymptotas ACH sit qualibet ex infinitis hyperbolis PKP, cujus ea proprietates, ut potestas ordinata KB abscissata ab  $m$ , ad similem alterius ordinata PD potestatem, sit reciproca, ut quatuor potestas abscissa à ventura DC, cujus index  $n$ , ad similem abscissa BC potestatem. Dico, quod si fiat AB ad BC, ut  $m$  ad  $n$ , juncti AK hyperbolam tangat in K.

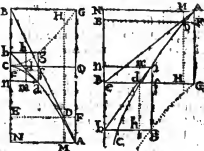


Occurrat AK ordinata PD in F; eritque factum ex  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{BK}^m$  ad factum ex  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{BK}^m$ , ut  $\overline{BK}^m$  ad  $\overline{BA}^m$ , sive ut  $\overline{DF}^m$  ad  $\overline{DA}^m$ , vel ut productum ex  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{BF}^m$  ad productum ex  $\overline{CD}^n$  in  $\overline{DA}^m$ ; aequi  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{BA}^m$ , ex *lemm. precedenti*, cujus hypothese casus hic congruit, majus est quam  $\overline{CD}^n$  in  $\overline{DA}^m$ , ergo ( per 14. §. *slom.* ) etiam  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{BK}^m$  ( vel  $\overline{CB}^n$  in  $\overline{DF}^m$ , ipsi æquale, ob reciprocam potestatum rationem ) majus est quam  $\overline{CD}^n$  in  $\overline{DF}^m$ ; major est igitur DP, quam DF, & ideo pun-

# Geometrica. 83

punctum hyperbolæ P est ultra rectam KA, idque ubique contingit, ergo AK in solo puncto K hyperbolæ occurrit, ipsamque tangendo prætergreditur.

LEMMA X. In quavis figura CAN, si ad terminos A, a ordinatarum AN, an, ordinatur recta AG, a g axi BN parallela, æquales verò respectivois subtangentibus NB, nb, erit figura GgaA æqualis figuræ AanN, cui correspondet.



Has figuras cap. 8. Huygenior. n. 2. Correlatas appellabam, earumque æqualitatem (suppositis infinitè proximis GAN, HDE) demonstravi ex 43. 2. elem. propter æqualitatem Elementaria parallelogramma DFGH, DENM, itemque  $dfgh$ ,  $denm$ , quæ sunt complementa parallelogrammorum circa diametrum AB, sive  $ab$ . Quare constat propositum.

LEMMA XI. Erit AAC quavis ex infinitis hyperbolis supra descriptis, & suis potestates ordinatarum AN, an, quarum index m, reciproca potestatis abscissarum nD, ND, quarum index n, & ductus axis AO, a f ordinata ad aliam asymptotam: erit ut m ad n, ita quadrilinerum NAA n ad quadrilinerum OAA f.

Extensis enim OA, fa ad G, & gin b ratione n ad m, fiat alia hyperbola ejusdem generis Gg, quæ erit correlata priori, ut in lem. 10. eo quod AG, a g æquantur subtangentibus NB, nb, ad quas abscissæ ND,





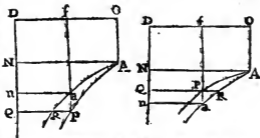
bolicam plusquam infinities superare inscriptum parallelogrammum Cl. VVallisius contendit) putà si  $n$  existente 1 fuerit  $m$  æqualis 2, fiet parallelogrammi ratio ad aream hyperbolicam quæ — 1 ad 2: si fuerit  $m$  æqualis 3, fiet illa ratio — 2 ad 3, atque ita deinceps; quas quidem rationes, patet non esse subduplam, aut subsequalteram, intercedentem inter aliquem ex terminis, qui comparantur, inverso situ acceptum ( ut prætendit Varignonius ) & reliquum eodem loco manentem, licèt hoc ipsum verificari contingat, quia nempe area  $NAAC$  ad reliquam  $DNAV$ , quæ, trans ordinatam, ad partes oppositas vergit, semper invenitur esse, ut  $m - n$  ad  $n - m$  [ ut facillè deducitur ex præmissis, & utramlibet ad inscriptum parallelogrammum, velut ad  $m$ , comparando ] itaque alterutra est ut differentia exponentium negativa, vel positiva, nempe si  $m$  superet  $n$  numero  $b$ , erit prima ad secundam ut  $b$  ad  $-b$ , sin major fuerit  $n$ , quàm  $m$  eadem differentia, erit illa ad hanc ut  $-b$  ad  $b$ , cùm simili lege utraque area ad utramque asymptoton referatur, mutatis dumtaxat ordinarum potestatis in potestates abscissarum, & contra; Sed quemadmodùm in casu Apollonianæ Hyperbolæ, cujus ratio ad inscriptum parallelogrammum est  $n$  ad  $n - n$ , sive 1 ad 0, non contendit Varignonius, consequens rationis 0 indicare in antecedenti *nullam magnitudinem* ( quasi in ipsam ordinatam  $AN$ , unde originem ducit, contraheretur area hyperbolica ) sed *absolutè infinitam*, licèt interim in rebus physicis, aut geometricis quantitatibus, datam positionem, ex determinata origine, servantibus, quoties contingit, quantitates illas, puta  $a$ , &  $b$ , invicem æquari, tunc  $a - b$  æquetur 0, & in nihilum abeat, sive retrocedens exactè quantitas  $b$  ad præcitatam originem ipsius  $a$  nec citra consistens, nec ultra procurrans, in ejusdem  $a$  principium contrahatur, ibique, in non quantum sui generis degenerans, evanescat: ita in casu altiorum hyperbolarum, ubi ratio paral-

parallelogrammi ad aream hyperbolicam subsequenter est  $a - m$  ad  $m$ , five  $-1$  ad  $1$ , aut  $-2$  ad  $3$  &c. non videtur præsumendum, ex negativo antecedente, indicari consequentis areæ transpositionem faciendam ad aliam partem ordinatæ, ut passim in magnitudinibus situm habentibus, si ex fixa origine in determinatam plagam protenduntur  $a$ , &  $b$ , sitque illa minor, hæc major differentia  $c$ , ita ut  $k = ac$ , tunc  $a - b = a - a - c = -c$ , & hæc est positiva quantitas retrorsum ab origine computata, in adversam partem ab illa, veras quam se extendere  $a$ , &  $b$  supponebantur; Sed imò hinc concludere licet, dictum parallelogrammum ad consequentem aream, ut minus quam nihil, comparari, adeo ut hæc illud superet plusquam infinitè: quin potius, si negativa expressio quædam invertendum concluderet, ipsum parallelogrammum, quod est homologus comparationis terminus negativæ  $-1$ , aut  $-2$ , situm mutare deberet, non area hyperbolica, quæ homologa est positivo termino  $m$  experimenti  $2$ , aut  $3$  positivæ unitates; quemadmodum in expressione Apollonianæ hyperbolæ, ad quam dictum parallelogrammum est, ut  $0$  ad  $1$ , idem parallelogrammum, velut nihilum reputatur respectu areæ infinitæ hyperbolicæ, non è contrario area hyperbolica in nihilum degenerat: sed hæc obiter dicta, fiat in Vallisiani argumenti defensionem, cujus causa tamen ab hoc puncto non pendet, cum nec mihi propositum sit ab ejusmodi analytica expressione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui sanè hinc non facile commodè elicerentur, alteram aream hyperbolicam alteri superioris ordinis comparando, & in hoc tantum Vallisiani ratio deficere videtur) sed potius geometrica ostensione, ut videbimus, quæ hanc negativæ signi ambiguitatem nihil moratur.

LEMMA XIII. Per idem punctum  $A$  transeant duæ hyperbolæ, Apollonianæ  $AaR$ , & quadam alia  $AP$ , cujus ordinatarum  $PQ$   
 post.



potestas in re-  
ciprocè respon-  
dent abscissis  
DQ, & ex quo-  
libet ejus pun-  
cto P ad asymp-  
ptotos paralle-  
la agatur PQ,  
Pf, occurren-  
tes priore by-  
perbola in R, a : erit trilineum RAP ad trilineum AaP,  
ut m ad 1.



Cum in hyperbola Apolloniana quadrilinea Aa<sup>n</sup>N, Aa<sup>f</sup>O fiat æqualia [ per coroll. lemm. 1. scilicet ex lemm. 11. ob indices m, n æquales, quibus dicta spatia proportionantur ] apposito, aut dempto communi trilineo PaA, fiet spatium NAPa<sup>n</sup> æquale PfOA; sed PANQ ad PfOA, per lemm. 11. est, ut m ad n, five, in hoc casu, ut m ad 1; ergo idem PANQ etiam ad NAPa<sup>n</sup> erit, ut m ad 1: sed etiam QRAN ad NAPa<sup>n</sup> est ut ratio duarum nD, DN, per lemm. 6. scilicet pariter ut m ad 1 (quia prima ratio semel accepta æquatur secundæ per m multiplicatæ, cum ex hypothese sit QD ad DN, ut nA<sup>m</sup> ad nQ<sup>m</sup> vel n<sup>m</sup>, idest ut nD<sup>m</sup> ad nQ<sup>m</sup>) ergo & reliquum RAP ad reliquum AaP est in eadem ratione m ad 1. Quod erat &c.

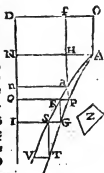
COROLL. Hinc constat, dividendo in prima figura, esse RPa ad AaP, ut m - a ad 1: ac in secunda figura, esse RPa ad AaP, ut 1 - m ad 1; & RPa ad RPa in prima figura esse, ut m - 1 ad m: at in secunda figura, esse, ut 1 - m ad m, unde si in primo casu m æquatur 1, vel in secundo m æquatur dimidio unitatis [ hoc est sit exponens radice quadratæ ] patet, rectam Pa primæ figuræ, bifariam dividere trilineum ARP, & rectam RP secundæ figuræ, similiter bifariam secare trilineum AaP.

LEM.

LEMMA XIV. *Isidem positis, ex bislinea*  
*RAP utriusque hyperbola intersecto, magni-*  
*tudinem data qualibet finita quantitate Z*  
*majorem secabimus.*

Sit primò numerus  $m$  major unitate, & tunc ducta quavis  $Pa$  asymptoto  $DQ$  parallela, multiplicetur ratio  $m$  ad 1, usquedum æqualis, aut proximè major evadat ratione  $Z$  ad  $APa$ ; sitque ratio sic multiplicata eadem, quæ producta ex numero  $r$  in  $m$ , idest  $rm$  ad 1. Tum ducta  $PR$  asymptoto  $DO$  parallela, agatur  $RG$  parallela  $DQ$ , deinde  $SG$ ;  $ST$ ,  $TV$  alternatim asymptotis parallelæ, idque in tot punctis  $P, G, T$  continuetur, quoties multiplicata fuerit ratio  $rm$  ad 1 rationis  $m$  ad 1. Quia igitur spatium  $AVT$  ad spatium  $APa$  rationem habet compositam ex intermediis rationibus,  $AVT$  ad  $ATS$ ,  $ATS$  ad  $ASG$ ,  $ASG$  ad  $AGR$ ,  $AGR$  ad  $ARP$ , &  $ARP$  ad  $APa$  (omnibus majoris inæqualitatis) quarum prima, tertia, & quinta (aliquæ impari loco positæ si plures fuerint) æquantur semper ex *lemm. 13.* rationi  $m$  ad 1. quæ simul componitur eandem rationem multiplicatam juxta acceptum numerum punctorum  $P, G, T$ , adeoque ex se solis conflant rationem  $rm$  ad 1. idest æqualem, aut proximè majorem, ratione  $Z$  ad  $APa$ , patet utique, rationem  $AVT$  ad  $APa$ , quæ ex recensitis, & insuper ex secunda, quarta, aliisque pari loco positis componitur, longè majorem esse ratione  $Z$  ad  $APa$ , ideoque spatium  $AVT$  multò majus fore proposito spatio  $Z$ .

Sin autem fuerit  $m$  [ *ut in figura sequenti* ] minor quàm 1, tunc ipsa  $Pa$  ducatur parallela  $DO$ , & ratione 1 ad  $m$  vicissim multiplicata, usque dum fiat ratio  $r$  ad  $m$  æqualis, aut proximè major ratione  $Z$  ad  $APa$ , continuetur in



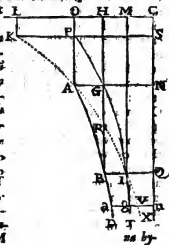
# Geometrica.

in totidem punctis flexilineū  $APRGSTV$   
 ex lineis alternatim parallelis ad asym-  
 ptotos, & eodem ratiocinio colligetur,  
 spatium  $ATV$  ad  $APa$  majorem rati-  
 onem habere, quàm  $Z$  ad  $APa$ , qua-  
 solæ rationes  $ATV$  ad  $ATS$ , nec non  
 $AGS$  ad  $AGR$ , &  $APR$  ad  $APa$   
 [ singulæ ex lemm. 13. æquales rationi  
 1 ad  $m$  ] componerent rationem  $r$  ad  
 $m$ , multiplicatam scilicet ipsius 1 ad  $m$ ,  
 pro numero punctorum  $P, G, T$ ; Quare  
 constat, in hoc etiam casu, ex bñneo  
 $RAP$  secari posse spatium  $TAV$  ma-  
 jus qualibet finita magnitudinæ propo-  
 sita  $Z$ . Quod erat &c.



COROLL. Hinc patet, spatium, hyperbola Apolloniana  
 $ARV$ , & quavis aliâ  $APT$  interceptum, esse magnitudinis  
 absolute infinitæ, potest enim ad finitum spatium  $APa$  ratio-  
 nem habere majorem qualibet assignabili.

LEMMA XV. *Sis hyperbola K Apolloniana AIV, & alia qua-  
 libet ABA D, cujus ordinatæ AN, an potestates, per numerum  
 m (unitate majorem) denomina-  
 ta, reciprocè respondeant abscissis  
 nC, nC: tum per sectionem qua-  
 rumvis asymptotæ parallelarum,  
 AQ, BH, in punctis P, G,  
 in qualibet assignabili ratione,  
 puta 1 ad 1, fiat hyperbola PGI  
 ipsi ABA D proportionaliter ana-  
 loga. Dico, PGI convenire ali-  
 enis, velut in I, cum Apollonia-  
 M*



na hyperbola AIV, & ulterius  
productam eam secare.

Ordinata PS occurrit Apollonianæ hyperbolæ in K, & ducta KL asymptoto parallela, fiat, ut  $m - 1$  ad  $1$ , ita quadrilinerum hyperbolicum OLKA ad OAIM, resectum pariter recta MI asymptoto CQ parallela; cùm igitur illud spatium ad hoc (lemm. 6.) sit, ut rat o duarum LC, CO, sive AO, OP, nempe  $f$  ad  $1$ , ad rationem duarum OC, CM, erit, ut  $m - 1$  ad  $1$ , ita ratio  $f$  ad  $1$  ad rationem OC ad CM, & componendo, ut  $m$  ad  $1$ , ita composita ratio ex  $f$  ad  $1$ , & OC ad CM (nempe ratio  $fOC$  ad CM) ad ipsam rationem OC ad CM; unde productum extremorum æquabitur producto mediorum, idest posterior ratio multiplicata per  $m$  seu ratio  $CO^m$  ad  $CM^m$  æquabitur simplici rationi  $fCO$  ad CM, compositæ scilicet ex  $f$  ad  $1$ , sive AO ad OP, & CO ad CM, aut IM ad AO, quæ duæ rationes constant rationem IM ad OP: sed ut  $CO^m$  ad  $CM^m$ , ita ex natura curvæ PGT est etiam MI, quæ ex M asymptoto CQ parallela usque ad curvam PGT ducitur, ad eandem OP; igitur eadem est IM ad Apollonianam, & MI ad hanc hyperbolam novissimè ductam; quare utraque hæc curva in puncto I conveniet; deinceps autem,  $QI^m$  ad  $IV^m$  [posita  $ng$  ordinata ad hanc hyperbolam PIT,  $nV$  verò ordinata, ad Apollonianam ARV] seu  $nC$  ad CQ, vel QI ad  $ng$ , & idcò  $nV$  major erit quàm  $ng$ , quare manifestum est, utramque curvam se invicem secare in I, & curvam PGI ex interiori fieri

# Geometrica. 91

fieri exteriorem Apollonianæ hyperbolæ. Quod &c.

His positis, atque attentius perspectis, facillimè demonstrabitur præcipuum nostrum.

## THEOREMA.

**C**ujuslibet hyperbolæ Apolloniana altioris, spatium asymptoticum est Plusquam : Infinitum censendum.

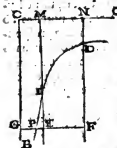
Intelligatur ARIVX hyperbolæ Apollonii, & per idem punctum intra easdem asymptotos QCO descripta sit hyperbolæ quælibet, cujus ordinarum AN,  $n$  potestas ab exponente  $m$ , qui major sit unitate, denominata, respondeat abscissis reciproçè acceptis  $n$ C, NC. Dico spatium  $n$ COABD, ad partes D infinite productum, esse infinities majus spatio absolute infinito Apollonianæ hyperbolæ  $n$ COARV æquè in infinitum producto : adeoque illud esse Plusquam Infinitum.

Assignetur enim quælibet ratio majoris inæqualitatis,  $f$  ad 1; & singulis asymptoto CQ parallelis AG, BH &c. in tali ratione sectis ad puncta P, G &c. ducta sit hyperbolæ PGT, priori ABD proportionaliter analogæ, quæ [ *lemm. 15.* ] secabit Apollonianam hyperbolam alicubi, velut in I; bilineum autem VIT ( *per coroll. lemm. 14.* ) erit absolute infinitum, adeoque infinities majus terminato spatio PGIRA; & apposito communi spatio  $n$ COPGIVX, fiet  $n$ COPGIT absolute majus spatio  $n$ COARIVX; & ideo spatium NCOABD majorem habebit rationem ad hoc secundum, quàm ad illud primum : sed ad illud ( ob proportionalem singularum parallelarum OA, HB sectionem ad P, G in ratione  $f$  ad 1 ) est in assignabili quavis ratione  $f$  ad 1; ergo ad hoc secundum rationem  $n$  habet majorem qualibet assignabili; infinities igitur ipsum superat, adeoque est Plusquam Infinitum. Quod erat demonstrandum.

M 2

Nunc

Nunc ad scrupulos rursus exequiendos accedo. Illud in primis opponis, quomodo fieri possit, ut omne asymptoticum spatium, velut  $CNDIB$ , infinities minus afferi possit circumscripto parallelogrammo  $CNF$ , ut ego saepius asserui: cum tamen, si intelligatur Vas prismaticum datae altitudinis equalis  $CN$ , basim habens ipsum asymptoticum spatium, aqua, vel alio fluido repleti, tum amota curva sponda  $DIB$ , permittatur aqua fluere usque ad spondam  $NF$  alteri  $CG$  parallelam, adeo ut adaptetur prismati,



basim nunc habenti parallelogrammū infinitē longum  $CNF$ , consequens videatur, ut ad aliquam altitudinem, si non equalē priori, saltem in aliqua ad ipsam ratione assignabili, eadem aqua assurgat, ne dicere cogamur, infinitam molem aquae vix sufficere ad madefaciendam dumtaxat infinitē longi parallelogrammi superficiem, nec tantam esse, ut supra solum vas  $CNF$  vel tantillam eleve-

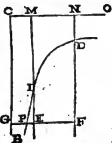
tur, quod absurdum ab omnibus censendum fore arbitroris. Ad haec, si in parallelepipedum, super determinato quadrato  $CN$  in longitudinem infinitam erectum, aquas illam, quae prius intra prismam finitae altitudinis  $CN$ , sed infinitam asymptoticam aream pro basi obtinens, concludatur, immisam concipiamus, utique ad infinitam altitudinem fore elevandam observas, adeoque congerere posse prismati, basim habenti infinitum parallelogrammum, finitam verò altitudinem: & sic non esse censendum asymptoticum spatium infinities minus parallelogrammo circumscripto. Postremo auctoritatem nescio, an rationem Cl. V. Galilaei obicere identidem non praetermittis, quippe qui *Diast. 1. de nova scientia* non posse invicem comparari infinitas magnitudines, exemplo radicum, quadratorum,

torum, ac cuborum ex omnibus numeris selectorum evincit, unde vocabula majoris, minoris, & æqualis locum non habere in Infinitis statuit, eoque minus admissurum. hæc nostra *Plusquam Infinita* arbitraris, qui ne rationem quidem assignabilem in ejusdem generis Infinitis agnoscat: unde sapius repetis, cavendum, ne mirum in modum hallucinemur, dum tam æquidistant infinitas quantitates, finitæ nostræ mentis captum excedentes, versare non dubitamus, ac de iisdem, perinde ac de finitis, per analyticos calculos, geometricos discursus, ac figurarum diagrammata, discurrere præsumimus.

Quibus hæc breviter posse reponi observo. Primum nihil absurdi esse, quod aqua illa, que vas prismaticum asymptotale  $CNDIB$  implebat, applicata Vasi parallelepipedo super parallelogrammo  $CNF$  erecto, vix ejus fundum madefaciat, nec ad ullam finitam altitudinem à sua basi elevetur, sed tantum ad infinitè parvam, adeo ut quàm infinites minus est spatium asymptoticum  $CNDIB$  circumscripto parallelogrammo  $CNF$ , tam infinites minor sit reciprochè altitudo, ad quam in hoc parallelepipedo effugiet aqua, altitudine  $CN$  prioris prismatis, ut generatim in omnibus solidis æqualibus contingere necesse est: ac demum illud idem in hoc casu dicendum esse, quod quis diceret, si ex finito aliquo, quantumvis magno, æquorum receptaculo, pura ex toto oceano, effundi intelligeretur aqua in immensam planitiem, seu superficiem infinitam, cui adherendo, certè non posset in ullam datam altitudinem elevari, sed illam vix humectaret: eodem, quippe modo finitum oceani fundum se habet ad immensam planitiem, ut infinita area asymptotica ad circumscriptum parallelogrammum, quod illa ostenditur infinites majus.

Secundò, si aqua illa replens prismaticum Vas asymptotale, infunderetur parallelepipedo basim habenti datum

tum quadratum rectæ CN, sed interminatam altitudinem, utique intra illud ad altitudinem infinitam erigeretur, sed tamen infinities minorem, quam sit longitudo spatii asymptotici: nimirum si aëa asymptotica fuerit hyperbolæ Apollonianæ, erit altitudo prismatis æqualis infinito axi Logistice, seu Logarithmicæ, subtangentem habentis æqualem ipsi NC lateri quadrati hyperbolico spatio inscripti: nam ejusmodi spatium asymptoticum sæpius ostendimus æquari rectangulo ex dicta NC in axem præfatum Logisticæ, ut quævis asymptotici spatii terminata portio æquatur rectangulo ejusdem NC in rectam axi Logisticæ parallelam, ejusque curvæ, & asymptoto hyperbolæ interpolatam; itaque cum dicimus, spatia hujus generis asymptotalia esse infinities minora rectangulo quovis infinitè longo, intelligendum est de longitudine æquè infinita, ac sit longitudo dicti spatii: seu de rectangulo ipsi circumscripto, & qualibet ejus parte proportionali, per subdivisam illius latitudinem resecta: non autem id asserimus de quovis infinito rectangulo indiscriminatim. Vide Scholion I. subiectum *coroll. 2. prop. IX. pag. 59.* hujus tractatus.



Tertio ad Galilæi sive auctoritatem, sive rationem, respondeo, me nullatenus dubitare, si viveret nunc temporis Vir Clarissimus, & tot Illustrum Mathematicorum, qui hos diversos infinitorum gradus mecum agnoscunt, fundamenta perpenderet, insignemque hujus doctrinæ usum in geometricis, & physicis problematibus solvendis agnosceret, aut eorum auctoritati & rationi suam liberè, & synccrè postpositurum, aut saltem fore, ut mirabilia hæc profundioris Geometriæ arcana, sin minus probaret, certè debita veneratione suspiceret, eoque loco haberet, quo sua



sua Paradoxa de puncto æquali peripheriæ, aliisque hujusmodi, habenda esse à cæteris Mathematicis voluit. Cæterùm, re maturiùs, atque attentius pensata, fortasse Vir Lynceus animadverteret, ex omnibus possibilibus numeris, nedum plures, sed infinities plures esse radices, quàm quadratos; & adhuc infinities plures quadratos esse, quàm cubos, & subinde semper infinities minorem esse multitudinem altiorum potestatum: quemadmodum & faciliè colligeret, omnium prorsus numerorum multitudinem esse duplam multitudinis imparium dumtaxat, vel dumtaxat parium numerorum; itemque eandem omnium numerorum multitudinem triplam esse illorum multitudinis, quos ternarius numerare potest; &c. Ad rationem verò dubitandi, an non totidem censendi sint quadrati, aut cubi, quot radices &c. cùm cuilibet radici suum respondeat quadratum, & suus cubus: itemque an non totidem sint omnes prorsus numeri, quot soli pares, aut soli illi, qui à ternario numerantur, cùm cuius prorsus numero suus duplus (qui par est) possit assignari, itemque singulis correspondeat suus triplus [quem idèò ternarius metitur] &c. ipsummet responsurum arbitror, hæc omnia falsa esse, si ad æqualem terminorum numerum cujusvis generis numerorum series prorogari intelligatur: ut enim ab 1 ad 10, vel ad 100, vel ad 1000. &c. semper falsum est tot esse radices, quot quadrata, quot cubi; quot pares numeri, quot à ternario numerati, etenim quos Galilæus ait assignari posse singulis radicibus quadratos, cubos, itemque duplos, & triplos &c. extra seriem acceptam existere certum est: ita etiam si in multitudine majori qualibet data, juxta ejusdem infinitatis progressum, numeri infiniti accipiantur, falsum erit, totidem in ipsis radices, quot quadratos, & cubos, & per binarium, & per ternarium divisibiles posse assignari, qui enim sic corresponderent (præter paucos in accepta serie contentos) ultra terminum assumptarum radicum

quæ, extra progressionem, forent assumendi, quemadmodum ultra denarium excurrunt numeri quadrati, & cubi, & dupli, & tripli eorum qui ab 1 ad 10 computantur: & ultra centenarium sunt qui similiter respondent singulis numeris intra centenarium conclusis; atque ita deinceps; hæcque ratio non deest, cur exderemus, ipsammet Causalium, facile admissu: ut, quod infinita omnem æqualitatis, & inæqualitatis majoris, ac minoris, ipsamque ætærorum graduum varietatem induere possint, neque igitur læcuram, ut inditam nobis à D. O. Opt. Max. infiniti ideam, quoad finem potest, assiduo contemplemur, ejusdemque Auctoris vocari infinitam essendi plenitudinem, immensam, interminatam, incircumscriptam, Sapientiæ, Potentiæ, Bonitatisque magnitudinem, per hæc xogmata, interim admirantes, dum paulatim ad despiciendas hæc finitas res, & cadentes animum erudientes, ad illud *Infinitorum, & Plusquam Infinitorum omnium Maximum*, sine extensione immensum, sine successione perpetuum, sine multitudine infinitum, omnis extensionis originem, omnis successione fontem, omnis infinitatis principium, evidentiori intutu, facie ad faciem, aliquando pertractandum aspiramus. Hæc una juvenundissima contemplatio, per interminabilia svi feriem mentes nostras jugiter occupabit, hæc una beatorum efficiet: eus itaque dubitabimus hæc infinitatis nostri Auctoris vestigia, in admirandis operibus suis relictâ, has ejus magnitudinis velut umbras, & spectra, nobis in his tenebris occurrentia, quoad licentia, persequi, siquam inde veritatis hæcæ osuentes, futuræ sollicitatis specimen aliquod przgustare possimus?

Quod postè ex rerum finitarum proprietatibus, et undique circumscriptis figuris, de Infiniti natura, deque immensis spaciis pronunciare non versemur, id exira repetitionem oisè intelliges, si ex ipsis creaturis, utique finitis, exiguis, ob limitatis, ad ejusdem Creatoris nostri, Maxi-

Maximi, Infinitique notitiam ascendere nos debere animadvertas, & ex earum dotibus, quàmlibet imperfectis, summi Opificis infinitas perfectiones colligere, dum *lavifibilia Dei*, per ea quæ facta sunt, intellecta conspicuntur, ut monuit Apollolus. Ad hæc: tibi ipsi, ac vulgo philosophorum potius cavendum est, ne te præjudicio aliquo falli permittas, dum ab Infinito Finitum omne toto genere distingui putas, ut alterum cum altero conferri nequeat; magnitudinum quippe finitarum divisibilitas in infinitum, tot physicis, & geometricis argumentis demonstrata, & apud sapientes omnes jam inconcussa, arguit ipsasmet ad quoddam Infiniti genus pariter pertinere, tametsi, quia nobis ordinariè tractandæ occurrunt, ab infinitis secerni, & peculiari nomine Finitorum designari consueverint. Quævis materiæ particula, si doctissimum Leibnitzium audias, infinita est, non potestate dumtaxat, sed actu ipso, ut Scholæ loquuntur: en ejus verba ex Epistola ad D. Foucher Canonicum Divionensem in Diario Parisiensi 3. Augusti 1673.

*Je suis tellement pour l' infini actuel, qu' au lieu d' admettre, que la nature l' abhorre, comme l' on dit vulgairement, je tiens qu' elle l' affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Aussi je crois qu' il n' y a aucune partie de la matiere, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; & par consequent la moindre particelle doit estre considérée comme un monde plein d' une infinité de creatures differentes.*

Quæ si vera, aut veris similia censeantur, quis vetet imposturum de finitis magnitudinibus, perinde ac de infinitis, & è contrario de infinitis, perinde ac de finitis, discurrere, cum uno genere uterque magnitudinum ordo veluti comprehendatur? Præterquamquod ipse nostrarum demonstrationum progressus apertè ostendit, debitas cautiones à nobis minime prætermittas, prout rerum scerebat conditio, cum ex rationibus finitarum quantitatum, ad ipsas infinitas vel invicem, vel cum infinitis majoribus, aut

minoribus comparandas gradum faceremus.

Cæterùm quæ mihi obiecti sunt Trevoltienfium Sociorum, qui monumenta Scientiarum, ac bonarum Artium perfcribunt, testimonia, noſtræ cauſæ non admodum officere iudico. Ajunt illi artic. 33. menſium Maii, & Junii anni 1701 in recenſione Methodi Jacobi Bernoullii ad determinandos evolutarum radios „ *Analysim infinitè parvorum [ juxta præſim D. Hospitalis ] in ipſiſmet Inſinitis viſcera penetrare, nec Inſinitum dumtaxat complecti, ſed Inſinitam inſinitè, aut etiam inſinitorum Inſinitatem: ac optandum eſſe, ut ejusmodi Analyſis, quam contendunt ſecunditate admirabili præditam, tantam evidentiam ſecum afferret, quantum à Geometriâ jure expectamus: Sed cùm audiuntur differentes de Inſinito, deque Inſinito inſinitè, ac de Inſinito inſinitè inſinitè, atque ita deinceps ſine limite progredienda, cùmque finitis magnitudinibus hæc inſinitorum Inſinitates applicantur, non ſemper contingit, eos quos eradere, atque ad aſcenſum cogere conantur, tanta ingenii vi præditos eſſe, quantum requireretur, ut in adeo profundis abyſſis recondita myſteria diſcernere queant „ & infra ſub finem „ Qui antiquis Geometrarum ratiociniis affecti ſunt, non niſi agrè ab ſiſ ſe avelli patiuntur, ut tam abſtractas methodos proſequantur: ac facilè malint non adeò longè progredi, quam novas vias ingredi ad Inſinitum inſinitè inſinitè ducere: in quibus non adeò clarum circa ſe lucem ſemper aſpicient, ac ſatis obvius aberrandi periculo ſe frequenter obnoxios ſentient. Non ſufficit in rebus geometricis rectè concludere, niſi & legitimum eſſe illationem evidenter nobis innoſceat. „*

In quibus patet, non improbari quidem ipſarum infinitè parvorum Analyſim, nec doctrinam infinities inſinitorum, velut erroris ſuſpectam, traduci, ſed unum hoc querelæ ſubjectum eſſe, quòd non ſatis clarè, & evidenter ab hujus methodi cultoribus hæc omnia tradantur, ſed magni alicujus myſterii ad inſtar, intricatioſis calculi velo involuta propoſiti conſueverint, quòd fortalle in noſtro

tra-

# Geometrica. 99

tractatu culpares non poterunt, in quo dilucidè, ut arbitror, atque ex severiori Geometrarum methodo demonstrata omnia deprehendent. In eam quippe sententiam, & nos sponte concedimus, optandum esse, ut quæ per analyticum calculum inveniuntur, ad geometricam potius amussim exacta, si fieri potest, proponantur, quàm ut per symbola, multiplici præsertim exponentium gradu; & radicum implicatarum signis affecta, implicentur, ex quibus non statim, uno velut intuitu, quemadmodum ex linearibus demonstrationibus, veritatem expositorum Theorematum Lector elicere potest, sed longum ejusdem calculi sibi repetendi tedium subire cogitur, antequàm certam propositæ rei notitiam sibi comparet, non minori plerumque labore, quàm si ab initio eidem veritati ex integro per semetipsum indagandæ animum applicuisset.

Hæc habui, quæ difficultatibus tuis pro nuac reponerem: siquid exinde lucis haurire poteris, ea frue; siquid verò obscurius, præ argumenti ipsius conditione, dictum invenies, id quam primum, sincera, qua invicem utimur, libertate indicare ne prætermittas, congruam ex me dilucidationem, suo tempore, reportaturus.

*Vive, vale; & siquid novisti restans istis,*

*Candidus imperts: si non, his utere mecum.*

Dabam Aretii Kalendis Septembris MDCCIX.

» DOMINUS REGNABIT IN ÆTERNUM, ET ULTRA »  
*Exod. cap. 15. v. 18.*

FINIS.



AP.

**D**E Mandato Reverendiss. Patris D. Alphonsi Cellini Abbatis Generalis totius Ordinis Camaldulensis, attente legi librum, qui inscribitur: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitis parvorum ordinibus*, a P. D. Guidone Grando Monacho Camaldulensi Celebri Mathematico, & Pisanæ Universitatis Publico Philosophiæ Professore compositum, nihilque in eo tam Catholice Fidei, quam bonis moribus dissolutam invenio; quinimo Opus profundæ Geometriæ meditationibus, Infinitum ipsius Naturam, æquè ac differentialis Calculi Methodum illustrantibus, referentem, & tanto Auctore dignum, & Mathematicæ Studiorum perutile futurum censuo, si typis mandetur.

Dat. Avetæ in Monasterio S. Marci in Gradibus die 15. Septembris 1709.

*D. Antonius Franciscus Caramelli S. Theolog. Doctor,  
Abbas diti Monasterii, & Visitator Camaldulensis.*

**C**UM librum, cui titulus est: *De Infinitis Infinitorum, & Infinitis parvorum ordinibus*, a P. D. Guidone Grando Monacho nostro compositum recognoverit Reverendissimus P. D. Antonius Franciscus Caramelli Abbas Visitator (cui hoc ipsum commissum fuit) & censuerit in lucem edi posse, Nos facultatem Auctori præfato elargimur, ut eundem librum typis mandare valeat, si cæteris, ad quos spectat, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscripas, ac Sigillo Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventiæ die 1. Octobris 1709.

Ex Monasterio Nostro SS. Hyppoliti, et Laurentii Faventiæ die 1. Octobris 1709.

*D. Alphonsus Abbas Generalis Camald.*

Locus & Signum.

*D. Marinus Miserachi Cancell. Camald.*

IMPRIMATUR.

*Frater Carolus Antonius Panni de Cremona Ord. Min. Comv.  
Vicarius Generalis Sanctæ Inquisitionis Posarum.*

Imprimatur Papis.

*Anton. Francisc. Palmerini V. Generalis.*

005673882







